Límites y Continuidad

Ejemplos con Wolfram Mathematica y visualización gráfica con Excel

FERNANDO JAVIER SALAS BARRERA
MIGUEL ANTONIO SOPLIN PASTOR
LUIS ANTONIO FLORES FLORES

Título: LÍMITES Y CONTINUIDAD: Ejemplos con Wolfram Mathematica y visualización gráfica con Excel

Autor:

FERNANDO JAVIER SALAS BARRERA
MIGUEL ANTONIO SOPLÍN PASTOR
LUIS ANTONIO FLORES FLORES

Editor:

FERNANDO JAVIER SALAS BARRERA
CALLE GABRIELA MISTRAL 154. ASENT. H. MODELO. SAN JUAN BAUTISTA. MAYNAS. LORETO. PERU

1a. edición – Julio 2024

Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2024- 07046

ISBN: 978-612-00-987-76

RESOLUCIÓN: 2436-2024/DDA-INDECOPI

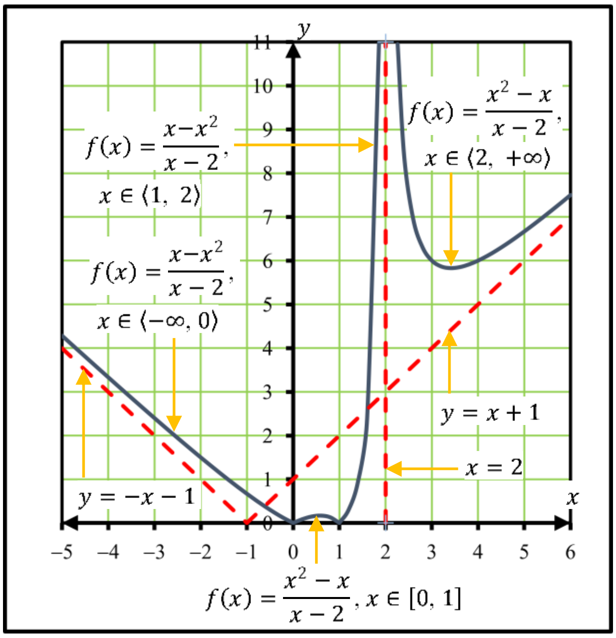
Producción intelectual realizada por catedráticos de la Universidad Nacional de la Amazonía Peruana

LÍMITES Y CONTINUIDAD

Ejemplos con Wolfram Mathematica y visualización gráfica con Excel

PRIMERA EDICIÓN
2024

$$\lim_{x\to -1} \frac{|x+1|^3 + |x + [\![x/8]\!]| - \sqrt{\sqrt[3]{7-x}+2}}{2+\sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20}+5\operatorname{sgn}(x^3-8)}}$$



FERNANDO JAVIER SALAS BARRERA
MIGUEL ANTONIO SOPLÍN PASTOR
LUIS ANTONIO FLORES FLORES

LÍMITES Y CONTINUIDAD

Ejemplos con Wolfram Mathematica y visualización gráfica con Excel

PRIMERA EDICIÓN
2024

Tiraje: 1000 ejemplares

Diseño, edición y carátula:

Impreso en el Perú

ISBN:

Hecho el depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°

Dedicado a nuestros seres queridos y a esa juventud estudiosa que son el futuro del Perú

ÍNDICE

PRÓLOGO

El objetivo principal al escribir este texto, es proporcionar los conocimientos básicos sobre límites y continuidad, ya que será de vital importancia para entender mejor, temas como las asíntotas y la derivada de una función, las cuales se aplican con frecuencia en los cursos que un estudiante de ingeniería y ciencias lleva dentro de su formación profesional.

El cálculo diferencial se apoya en el concepto del límite de una función, debido a que la derivada de una función en un punto representa la tasa en la cual una función cambia conforme cambia su argumento.

Muchos de los problemas reales se dan solución haciendo uso de las derivadas, pues para esto se hace un análisis entre las variables y se ve la dependencia que existe entre ellas. Como ejemplo a esto imagine una partícula que se desplaza en el plano xy, si usted quisiera evaluar la velocidad de esta partícula en cualquier tiempo, es decir tendría que derivar la ecuación que existe de su posición con respecto al tiempo y de esta forma estaría calculando el límite de una función.

Este texto cuenta básicamente de dos capítulos, en los cuales se presenta en forma detallada una serie de ejemplos y ejercicios propuestos.

El CAPÍTULO I trata sobre LÍMITES DE FUNCIONES (definiciones y teoremas importantes sobre límites, propiedades operacionales del límite, límites de la forma 0/0, límites laterales, límites al infinito, límites infinitos, asíntotas, límites de funciones trigonométricas y límites de la forma $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$.

En el CAPÍTULO II se muestran los procedimientos para determinar la CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN, ya sea en un punto o en un intervalo.

También se puede observar en el primer capítulo, la sintaxis para calcular límites con el programa Wolfram Mathematica, lo cual se aplicó en los ejemplos, permitiéndonos de esta manera comprobar los resultados obtenidos en forma procedimental. En ambos capítulos, se ha hecho uso de Excel para graficar las funciones.

Los autores agradecen a todas las personas que de alguna u otra manera han hecho posible la culminación de esta obra.

FERNANDO JAVIER SALAS BARRERA
MIGUEL ANTONIO SOPLÍN PASTOR
LUIS ANTONIO FLORES FLORES

CAPÍTULO I

LÍMITES

1.1. INTRODUCCIÓN

El concepto de límite de una función, es el punto de partida en el cálculo diferencial e integral, pues es fundamental para entender bien, temas como la derivada y la integral. Antes de dar una definición formal del concepto de límite, es importante que se comprendan algunas definiciones que se dan a continuación:

1.1.1. VECINDAD

Se llama **vecindad o entorno** de radio $r > 0$ y centro en $x_0 = \{x / |x - x_0| < r\}$ al intervalo abierto $\langle x_0 - r,\ x_0 + r \rangle$ y se denota por [1]:

$$V_r(x_0) = \langle x_0 - r,\ x_0 + r \rangle. \tag{1.1}$$

Vecindad reducida o vecindad con exclusión de x_0 es el entorno anterior sin el número x_0, se denota [1]:

$$V_r^*(x_0) = \langle x_0 - r,\ x_0 + r \rangle - \{x_0\}. \tag{1.2}$$

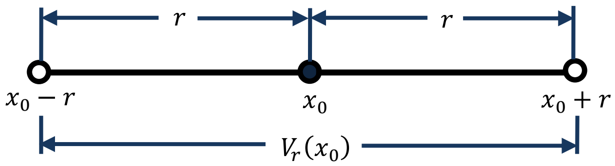


Figura 1.1. Representación gráfica de la vecindad $V_r(x_0)$ [1].

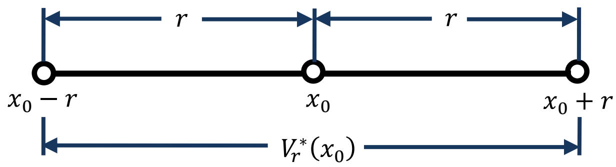


Figura 1.2. Representación gráfica de la vecindad $V_r^*(x_0)$ [1].

Ejemplo 1.1. Represente gráficamente las vecindades $V_{0.01}(3)$ y $V_{0.02}^*(2.5)$.

Solución.

$$V_{0.01}(3) = \langle 3 - 0.01,\ 3 + 0.01 \rangle = \langle 2.99,\ 3.01 \rangle$$

$$V_{0.02}^*(2.5) = \langle 2.5 - 0.02,\ 2.5 + 0.02 \rangle - \{2.5\} = \langle 2.48,\ 2.52 \rangle - \{2.5\}$$

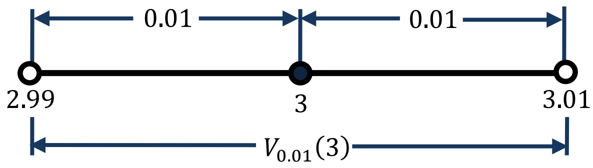


Figura 1.3. Representación gráfica de la vecindad $V_{0.01}(3)$ en el ejemplo 1.1.

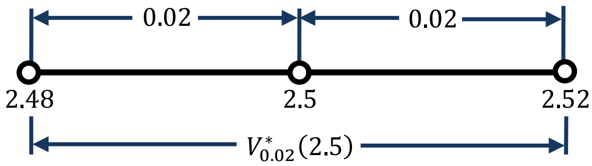


Figura 1.4. Representación gráfica de la vecindad $V^*_{0.02}(2.5)$ en el ejemplo 1.1.

1.1.2. PUNTO DE ACUMULACIÓN

Sea el conjunto $S \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces x_0 se llama punto de acumulación de S, si y sólo si, todo intervalo abierto centrado en x_0 contiene por lo menos un punto $x \in S$, distinto de x_0 [1]. Formalmente:

x_0 es un punto de acumulación de $S \leftrightarrow \forall V_r^*(x_0)$ y $r > 0$, se cumple que:

$$(\langle x_0 - r,\ x_0 + r\rangle - \{x_0\}) \cap S \neq \phi. \qquad \textbf{(1.3)}$$

En la figura 1.5, se muestra la representación gráfica del punto de acumulación.

Si $x \in S$ pero no es un punto de acumulación de S, entonces se dice que x es un punto aislado de S (véase la figura 1.6).

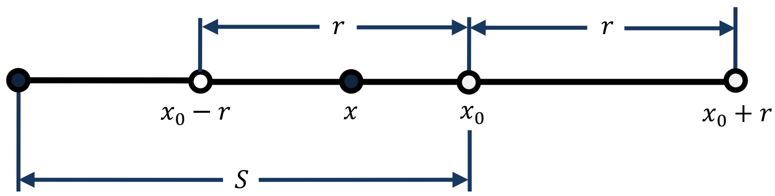


Figura 1.5. Ilustración gráfica de un punto de acumulación de S [1].

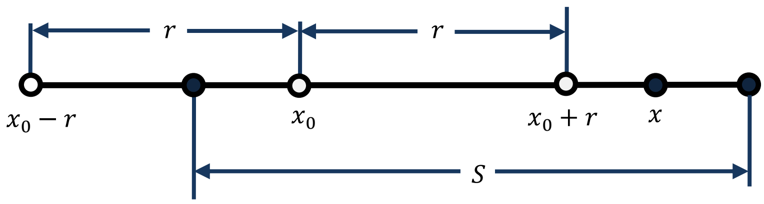


Figura 1.6. Ilustración gráfica del punto aislado de S [1].

Ejemplo 1.2. Sea el conjunto $S = \langle 3, 5\rangle$, determinar si los siguientes puntos son puntos de acumulación del conjunto S.

a) $x_0 = 3$, **b)** $x_0 = 4$

Solución.

Primeramente, se debe determinar un radio muy pequeño, que puede ser: $r = 0.1$

a) $x_0 = 3$ y $r = 0.1$

$$V_{0.1}^*(3) = \langle 3 - 0.1,\ 3 + 0.1\rangle - \{3\} \Rightarrow (\langle 3 - 0.1,\ 3 + 0.1\rangle - \{3\}) \cap \langle 3, 5\rangle \neq \phi$$

Por lo tanto, $x_0 = 3$ es un punto de acumulación de $S = \langle 3, 5\rangle$.

b) $x_0 = 4$ y $r = 0.1$

$$V_{0.1}^*(4) = \langle 4 - 0.1,\ 4 + 0.1\rangle - \{4\} \Rightarrow (\langle 4 - 0.1,\ 4 + 0.1\rangle - \{4\}) \cap \langle 3, 5\rangle \neq \phi$$

Por lo tanto, $x_0 = 4$ es un punto de acumulación de $S = \langle 3, 5\rangle$.

1.2. DEFINICIONES IMPORTANTES SOBRE LÍMITES

Hasta el momento se ha visto algunas definiciones necesarias para tener una idea del límite de una función. También es muy importante saber que L es un número real que se obtiene al evaluar el valor de $f(x)$ en las proximidades de un número x_0 (punto de acumulación del dominio de f) [1–4]. Es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L. \tag{1.4}$$

Según Figueroa [1] y Venero [6], la ecuación **(1.4)**, puede traducirse de las formas siguientes:

- Cuando x se aproxima a x_0, $f(x)$ se aproxima a L
- Para x próximo a x_0, $f(x)$ está próximo a L
- Cuando x tiende a x_0, $f(x)$ tiende a L

Los siguientes ejemplos, son para tener una idea más clara sobre el concepto de límite.

Ejemplo 1.3. Sea la función definida por $f(x) = x^2 + 1$. Evalué dos conjuntos de valores que se encuentren próximos a 1, uno que se aproxime por la izquierda y otro por la derecha.

Solución.

Para construir la tabla 1.1, se hace uso de la regla de correspondencia de f reemplazando valores de x que se aproximen a 1 por la izquierda y por la derecha, esto es:

$$x = 0.995 \Longrightarrow f(0.995) = (0.995)^2 + 1 = 1.990$$

$$x = 0.996 \Longrightarrow f(0.996) = (0.996)^2 + 1 = 1.992$$

$$x = 0.997 \Longrightarrow f(0.997) = (0.997)^2 + 1 = 1.994$$

$$x = 0.998 \Longrightarrow f(0.998) = (0.998)^2 + 1 = 1.996$$

$$x = 0.999 \Longrightarrow f(0.999) = (0.999)^2 + 1 = 1.998$$

$$x = 1.001 \Longrightarrow f(1.001) = (1.001)^2 + 1 = 2.002$$

$$x = 1.002 \Longrightarrow f(1.002) = (1.002)^2 + 1 = 2.004$$

$$x = 1.003 \Longrightarrow f(1.003) = (1.003)^2 + 1 = 2.006$$

$$x = 1.004 \Longrightarrow f(1.004) = (1.004)^2 + 1 = 2.008$$

$$x = 1.005 \Longrightarrow f(1.005) = (1.005)^2 + 1 = 2.010$$

Tabla 1.1. Valores correspondientes de $f(x)$ para diferentes valores de x próximos a 1.

x se aproxima a 1 por la izquierda → ← x se aproxima a 1 por la derecha

x	0.995	0.996	0.997	0.998	0.999	1	1.001	1.002	1.003	1.004	1.005
$f(x)$	1.990	1.992	1.994	1.996	1.998	?	2.002	2.004	2.006	2.008	2.010

$f(x)$ se aproxima a 2 por la izquierda → ← $f(x)$ se aproxima a 2 por la derecha

De la tabla 1.1 se puede observar, que en la medida que x se aproxima a 1, $f(x)$ se está próximo a 2. Entonces, se puede decir que el límite de $f(x) = x^2 + 1$, cuando x tiende o se aproxima a 1, es 2, esto se denota: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 1) = 2$.

Como se puede observar en la figura 1.7, la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ es una parábola que contiene al punto $(1, 2)$, es decir f está definida para $x = 1$, pues $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. También se puede notar que si x tiende arbitrariamente a 1, $f(x)$ tiende a 2 de la misma forma.

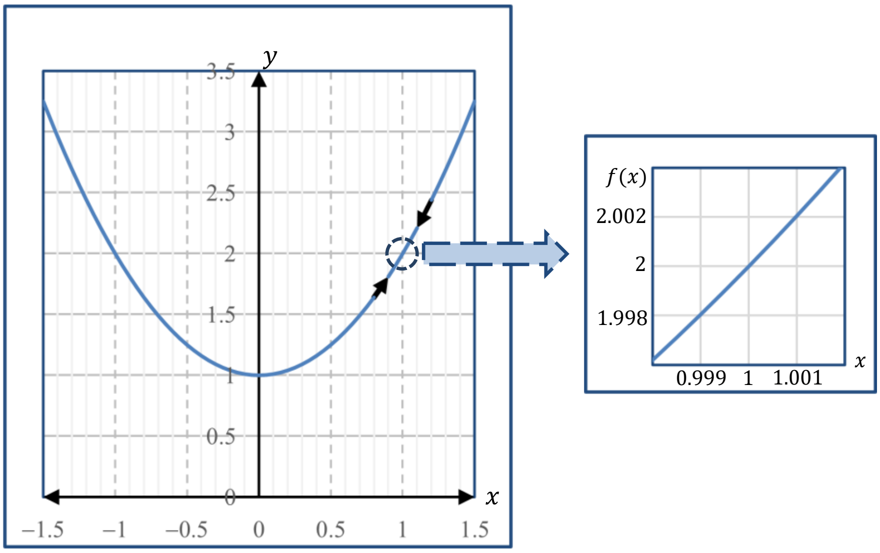


Figura 1.7. Ilustración gráfica del límite de $f(x) = x^2 + 1$ cuando x tiende a 1.

Ejemplo 1.4. Evaluar la función definida por $f(x) = (x - 3)/(\sqrt{x + 6} - 3)$ en varios puntos cercanos a $x = 3$ y usar el resultado para determinar el límite de la función.

Solución.

Se debe notar que f no está definida para $x = 3$, pues $\mathrm{Dom}(f) = [-6, +\infty\rangle - \{3\}$.

De la misma forma que en el ejemplo anterior, se construye una tabla de valores de $f(x)$ para varios valores de x cercanos a 3 por la izquierda y por la derecha.

El comportamiento de $(x - 3)/(\sqrt{x + 6} - 3)$ para valores de x cercanos a 3, pero diferente de 3, es el mismo comportamiento de $\left(\sqrt{x + 6} + 3\right)$. De esta forma el límite de $(x - 3)/(\sqrt{x + 6} - 3)$, cuando x tiende o se aproxima a 3, se evalúa de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \operatorname{Lim}_{x\to 3}\frac{(x-3)}{\sqrt{x+6}-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x+6-9)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3}(\sqrt{x+6}+3) = 6.$$

Recuerde que: $\frac{1}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{A-B}$

Tabla 1.2. Valores correspondientes de $f(x)$ para diferentes valores de x próximos a 3.

x se aproxima a 3 por la izquierda — x se aproxima a 3 por la derecha

x	2.995	2.996	2.997	2.998	2.999	3	3.001	3.002	3.003	3.004	3.005
$f(x)$	3.9992	3.9993	3.9995	3.9997	5.9998	?	6.0002	6.0003	6.0005	6.0007	6.0008

$f(x)$ se aproxima a 6 por la izquierda — $f(x)$ se aproxima a 6 por la derecha

De la tabla 1.2, se puede observar que a medida que x tiende a 3, $f(x)$ se aproxima a 6. Entonces, lo mencionado se puede expresar como: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$. Volviendo a observar la tabla 1.2, se puede afirmar que:

$$2.999 < x < 3.001 \;\Rightarrow\; 5.9998 < f(x) < 6.0002,$$ lo cual se puede expresar como:

$$3 - 0.001 < x < 3 + 0.001 \;\Rightarrow\; 6 - 0.0002 < f(x) < 6 + 0.0002$$

También:

$$-0.001 < x - 3 < 0.001 \;\Rightarrow\; -0.0002 < f(x) - 6 < 0.0002. \qquad \textbf{(D1-1.4)}$$

Por la propiedad del valor absoluto: Sean $x \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^+$, entonces: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ [6].

Entonces, **(D1-1.4)** queda:

$$0 < |x - 3| < 0.001 \;\Rightarrow\; |f(x) - 6| < 0.0002. \qquad \textbf{(D2-1.4)}$$

La desigualdad $|x - 3| < 0.001$, indica que si x dista de 3 en menos de 0.001, en consecuencia $f(x)$ dista de 6 en menos de 0.0002. Esta situación se puede representar usando dos símbolos que representan cantidades bien pequeñas pero positivas, estos son: épsilon (ε) y delta (δ). Entonces las desigualdades de **(D2-1.4)** quedarían representadas como:

$$0 < |x - 3| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - 6| < \varepsilon. \qquad \textbf{(D3-1.4)}$$

Para este caso $\delta = 0.001$ y $\varepsilon = 0.0002$. Por lo tanto, si se asigna a δ cualquier valor positivo, por más que este sea muy pequeño, se debe encontrar un valor correspondiente a ε. De esta manera se prueba que el límite de $f(x) = (x-3)/(\sqrt{x+6}-3)$, cuando x tiende a 3, es igual a 6, esto es: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$.

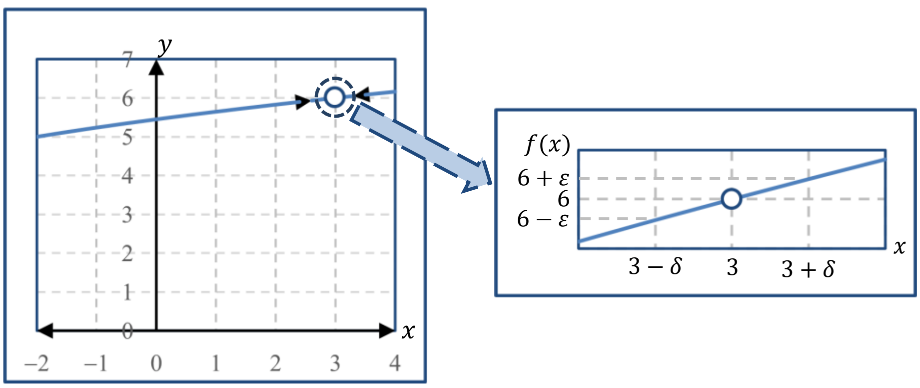


Figura 1.8. Ilustración gráfica del límite de $f(x) = (x-3)/(\sqrt{x+6}-3)$, cuando x tiende a 3.

1.2.1. DEFINICIÓN RIGUROSA DEL LÍMITE

Definición 1.1. Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación del $\mathrm{Dom}(f)$. Se dice que el número L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0, que no necesariamente $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, si y sólo si para cada número real $\varepsilon > 0$, existe otro número real $\delta > 0$ tal que, si $x \in \mathrm{Dom}(f)$ y $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ [1–6]. Dicho en forma simbólica (véase la figura 1.9).

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0)/(x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]. \quad \textbf{(1.5)}$$

Por la propiedad del valor absoluto se tiene:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow (-\delta < x - x_0 < \delta \wedge x \neq x_0) \Rightarrow (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \wedge x \neq x_0)$$
$$\Leftrightarrow x \in (\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle - \{x_0\}) \Rightarrow x \in V_\delta^*(x_0). \quad \textbf{(1.6)}$$

Como consecuencia de la proposición **(1.6)**, se tendrá un número muy pequeño pero positivo, es decir: $\varepsilon > 0$. Entonces, si se aplica la propiedad de valor absoluto en la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$, se tiene:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L). \quad \textbf{(1.7)}$$

Se debe tener en cuenta las siguientes aclaraciones con respecto a las proposiciones **(1.6)** y **(1.7)**

- Las letras griegas épsilon ε y delta δ representan números reales positivos que se acercan al cero, por lo general se escoge $0 < \delta < 1$ y se expresa δ en función de ε

- Al intervalo $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle - \{x_0\}$ se le llama vecindad reducida de centro en x_0 y radio δ y se representa como $V_\delta^*(x_0)$

- Al intervalo $\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$ se le llama vecindad o entorno de centro en L y radio ε y se representa como $V_\varepsilon(L)$.

Con respecto a la proposición **(1.5)**, también se puede sacar las siguientes conclusiones:

- Si $\mathrm{Dom}(f) \cap (\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle - \{x_0\}) \neq \phi$, entonces x_0 es un punto de acumulación del $\mathrm{Dom}(f)$.

- Si $\mathrm{Dom}(f) \cap (\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle - \{x_0\}) = \phi$,entonces x_0 no es un punto de acumulación del $\mathrm{Dom}(f)$, es un punto aislado y ocurre que el límite de la función en x_0 no es único.

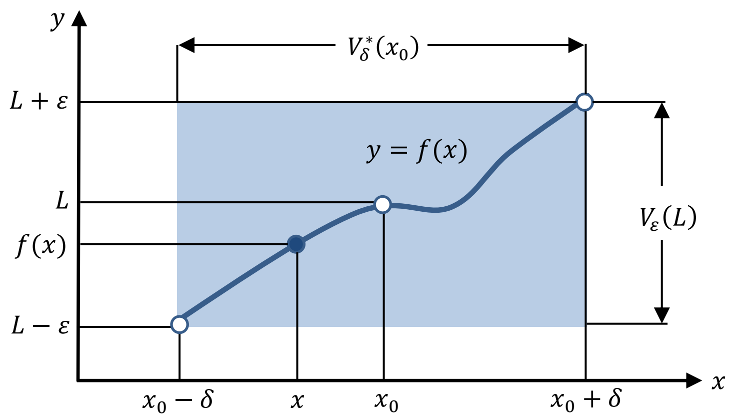


Figura 1.9. Representación gráfica del límite de una función [2, 3].

1.2.2. PASOS A SEGUIR PARA DEMOSTRAR LA EXISTENCIA DE LÍMITE

1. Se descompone $|f(x) - L| < \varepsilon$ en más de un factor, uno de los cuales necesariamente tiene que ser: $|x - x_0| < \delta \cdots\cdots$ **(1.8)**, esto es $|x - x_0||g(x)|$, donde $|g(x)|$ representa los factores de $|f(x) - L| < \varepsilon$ diferentes a $|x - x_0|$ [1, 5, 6].

2. A continuación, se busca acotar a $|g(x)|$, hallando los números positivos δ_1 y M, para los cuales: $|x - x_0| < \delta_1 \longrightarrow |g(x)| < M$ [1, 6].

El valor de M se obtiene asignándole un valor inicial a $\delta = \delta_1$ según la forma que tenga la función f:

- Si la función f es un polinomio de variable real, se elige $\delta_1 = 1$.
- Si la función f, es de la forma: $f(x) = P(x)/Q(x)$, tal que $Q(x) = (x - a)(x - b)\cdots\cdots$, donde $x = a$, $x = b$, etc., son asíntotas de f, se elige la más cercana a x_0. Suponiendo que la más cercana sea $x = a$, se hace $\delta_1 = \frac{1}{2}|x_0 - a|$.
- Si la función f, contiene radicales de índice par, el acotamiento de $|g(x)|$ se realizará a partir del dominio de f.

3. Una vez elegido δ_1, se construye $|g(x)|$ partiendo de $|x - x_0| < \delta_1$ [1, 6], entonces:

$|x - x_0||g(x)| < \varepsilon \cdots\cdots$ **(1.9)** y $|g(x)| < M \cdots\cdots$ **(1.10)**

Si se multiplica las desigualdades **(1.8)** y **(1.10)**, se tiene que: $|x - x_0||g(x)| < M\delta \cdots$ **(1.11)**

Comparando las desigualdades **(1.9)** y **(1.11)**, se tiene que: $\delta = \varepsilon/M$.

Se escoge δ como el menor o mínimo entre δ_1 y ε/M, esto es: $\delta = \min(\delta_1, \varepsilon/M)$.

Al hallar una relación entre δ y ε, se puede decir que se ha concluido la demostración de: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Ejemplo 1.5. Demostrar que: $\lim\limits_{x \to 2}(2x - 3) = 1,\ x \in [-2, 5\rangle$.

Solución.

Aplicando la definición de límite

$$\lim_{x \to 2}(2x - 3) = 1 \Leftrightarrow \left[(\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0)/\left(x \in [-2, 5\rangle \wedge \underbrace{0 < |x - 2| < \delta}_{\text{Hipótesis}}\right) \Rightarrow \underbrace{|(2x - 3) - 1| < \varepsilon}_{\text{Tesis}}\right]$$

Aplicando los pasos para la demostración de límite:

$$|x - 2| < \delta. \qquad \textbf{(D1-1.5)}$$

$$|2x - 4| < \varepsilon \;\Rightarrow\; 2|x - 2| < \varepsilon \;\Rightarrow\; |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \textbf{(D2-1.5)}$$

Comparando las desigualdades **(D1-1.5)** y **(D2-1.5)**, se tiene que: $\delta = \varepsilon/2$.

Por lo tanto queda demostrado que: $\lim\limits_{x \to 2}(2x - 3) = 1,\ x \in [-2, 5\rangle$.

Ejemplo 1.6. Demostrar que: $\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 - x + 1) = 2,\ x \in ([0, 1\rangle \cup \langle 1, 3])$.

Solución.

Aplicando la definición de límite

$$\lim_{x\to 1}(2x^2 - x + 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \left[(\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0)/\left(x \in ([0,1\rangle \cup \langle 1,3]) \wedge \underbrace{0 < |x-1| < \delta}_{\text{Hipótesis}}\right) \Rightarrow \underbrace{|(2x^2 - x + 1) - 2| < \varepsilon}_{\text{Tesis}}\right]$$

$$|x - 1| < \delta. \qquad \textbf{(D1-1.6)}$$

$$|(2x^2 - x + 1) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |(2x^2 - x - 1)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1||2x+1| < \varepsilon. \qquad \textbf{(D2-1.6)}$$

Entonces, como la función es polinómica se elige un $\delta_1 = 1$ y se construye $|2x + 1|$, partiendo de $|x - 1| < \delta$.

$$\Rightarrow |x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2 \Leftrightarrow 0 < 2x < 4 \Leftrightarrow 1 < 2x + 1 < 5$$

$$\Rightarrow |2x + 1| < 5 = M. \qquad \textbf{(D3-1.6)}$$

Luego si se multiplica las desigualdades **(D1-1.6)** y **(D3-1.6)**, se tiene que:

$$|x-1||2x+1| < 5\delta. \qquad \textbf{(D4-1.6)}$$

Comparando las desigualdades **(D2-1.6)** y **(D4-1.6)**, se tiene que:

$$5\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon/5 \Rightarrow \delta = \min(1, \varepsilon/5).$$

Esto significa que se debe escoger un δ que sea el mínimo entre 1 y $\varepsilon/5$.

Por lo tanto queda demostrado que: $\lim_{x\to 1}(2x^2 - x + 1) = 2,\ x \in ([0,1\rangle \cup \langle 1,3])$.

Se puede notar de la figura 1.10, que f no está definida para $x = 1$, pues $x \in ([0,1\rangle \cup \langle 1,3])$, lo cual indica que el punto $(1, 2)$ no pertenece a la gráfica de f. Sin embargo, aplicando la definición de límite se ha encontrado el valor correspondiente para $f(x)$ cuando x tiende a 1. Entonces, los entornos que corresponden a las coordenadas del punto $(1, 2)$, se pueden escribir como $V_\delta^*(1) = \langle 1-\delta, 1+\delta\rangle - \{1\}$ y $V_\varepsilon(2) = \langle 2-\varepsilon, 2+\varepsilon\rangle$, respectivamente.

Al hallar una relación entre δ y ε, se está demostrando que existe el entorno $V_\varepsilon(2) = \langle 2-\varepsilon, 2+\varepsilon\rangle$ y por ende existe el límite de la función $(L = 2)$, pues 2 está dentro del intervalo $\langle 2-\varepsilon, 2+\varepsilon\rangle$.

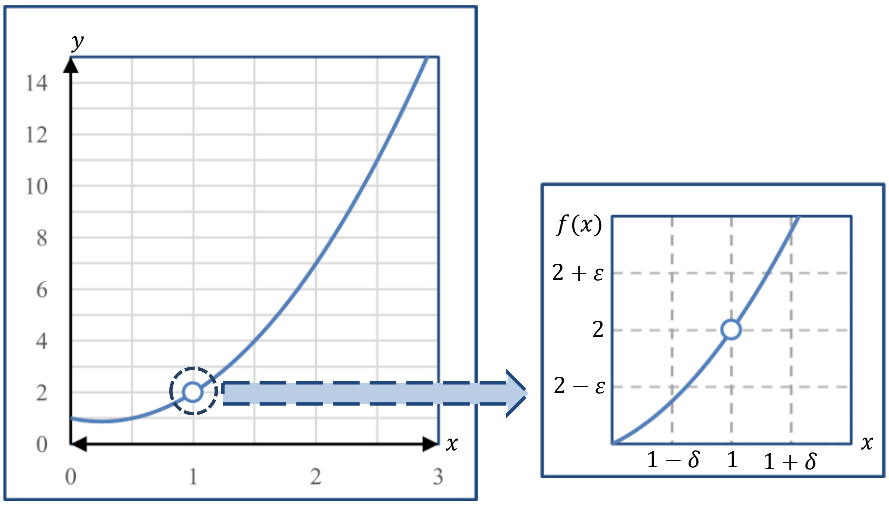


Figura 1.10. Ilustración gráfica del límite de $f(x) = 2x^2 - x + 1,\ x \in ([0,1\rangle \cup \langle 1,3])$, cuando x tiende a 1.

Ejemplo 1.7. Demostrar que: $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{8}$.

Solución.

Aplicando la definición de límite

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{8}$$

$$\Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0) / \left(x \in [-3, 3] \wedge \underbrace{0 < |x - 1| < \delta}_{\text{Hipótesis}} \right) \Rightarrow \underbrace{\left| \sqrt{9 - x^2} - \sqrt{8} \right| < \varepsilon}_{\text{Tesis}} \right]$$

$$|x - 1| < \delta. \qquad \textbf{(D1-1.7)}$$

$$\left| \sqrt{9 - x^2} - \sqrt{8} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1 - x^2}{\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{8}} \right| < \varepsilon \Rightarrow |1 - x||x + 1| \left| \frac{1}{\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{8}} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x - 1||x + 1| \left| \frac{1}{\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{8}} \right| < \varepsilon. \qquad \textbf{(D2-1.7)}$$

Acotando $|x + 1|$ y $\left| \frac{1}{\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{8}} \right|$, partiendo del dominio $x \in [-3, 3]$

$$-3 \leq x \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x + 1 \leq 4 \Rightarrow |x + 1| \leq 4. \qquad \textbf{(D3-1.7)}$$

$$-3 \leq x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq |x| \leq 3 \Rightarrow 0 \leq |x|^2 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 9 \Rightarrow -9 \leq -x^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 9 - x^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{9 - x^2} \leq 3 \Rightarrow \sqrt{8} \leq \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{8} \leq 3 + \sqrt{8} \Rightarrow \frac{1}{3 + \sqrt{8}} \leq \frac{1}{\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{8}} \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{8}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{8}}. \qquad \textbf{(D4-1.7)}$$

Multiplicando las desigualdades **(D1-1.7)**, **(D3-1.7)** y **(D4-1.7)**, se tiene que:

$$\Rightarrow |x - 1||x + 1| \left| \frac{1}{\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{8}} \right| < \frac{4\delta}{\sqrt{8}} \Rightarrow |x - 1||x + 1| \left| \frac{1}{\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{8}} \right| < \frac{4\delta}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |x - 1||x + 1| \left| \frac{1}{\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{8}} \right| < \frac{2\delta}{\sqrt{2}}. \qquad \textbf{(D5-1.7)}$$

Comparando las desigualdades **(D2-1.7)** y **(D5-1.7)**, se tiene que: $2\delta/\sqrt{2} = \varepsilon \Rightarrow \delta = \sqrt{2}\varepsilon/2$.

Por lo tanto queda demostrado que: $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{8}$.

En este caso la función f sí está definida para $x = 1$, pues $x \in [-3, 3]$, entonces el punto $(1, \sqrt{8})$ pertenece a la gráfica de f. De esta forma, los entornos que corresponden a las coordenadas del punto $(1, \sqrt{8})$ se representan como: $V_\delta(1) = \langle 1 - \delta, 1 + \delta \rangle$ y $V_\varepsilon(\sqrt{8}) = \langle \sqrt{8} - \varepsilon, \sqrt{8} + \varepsilon \rangle$, respectivamente.

De los ejemplos 1.6 y 1.7, se puede concluir lo siguiente:

- Si $x_0 \notin \mathrm{Dom}(f)$, entonces el entorno para x_0 necesariamente es: $V_\delta^*(x_0) = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle - \{x_0\}$, pues $f(x_0)$ no existe.

- Si $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, entonces el entorno para x_0 es suficiente expresarlo como: $V_\delta(x_0) = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, pues $f(x_0)$ existe y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

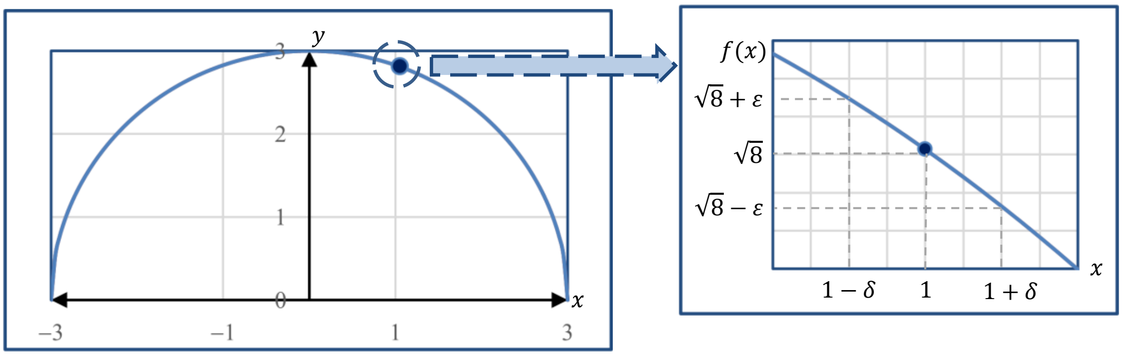


Figura 1.11. Ilustración gráfica del límite de $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, cuando x tiende a 1.

Ejemplo 1.8. Demostrar que: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[\![x-(1/5)]\!]+1}{|5x-1|}=\dfrac{1}{4}$.

Solución.

Determinando el valor de $[\![x-(1/5)]\!]$. Si $x\to 1\ \Rightarrow\ [\![x-(1/5)]\!]=[\![1-(1/5)]\!]=[\![4/5]\!]=0$

Recuerde que: $0<4/5<1\Rightarrow [\![4/5]\!]=0$.

$$|5x-1|=\begin{cases}5x-1, & x\geq \dfrac{1}{5}\\ 1-5x, & x<\dfrac{1}{5}\end{cases}$$

Si $x\to 1\ \Rightarrow\ |5x-1|=5x-1$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 1}\frac{[\![x-(1/5)]\!]+1}{|5x-1|}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{5x-1}=\frac{1}{4}.$$

Aplicando la definición de límite, se tiene:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{5x-1}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left[(\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0)/\left(x\in\mathrm{Dom}(f)\wedge\underbrace{0<|x-1|<\delta}_{\text{Hipótesis}}\right)\Rightarrow\underbrace{\left|\frac{1}{5x-1}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon}_{\text{Tesis}}\right]$$

$$|x-1|<\delta. \qquad \textbf{(D1-1.8)}$$

$$\left|\frac{1}{5x-1}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon\ \Rightarrow\ \left|\frac{4-(5x-1)}{4(5x-1)}\right|<\varepsilon\ \Rightarrow\ \left|\frac{5-5x}{4(5x-1)}\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{5}{4}\left|\frac{1-x}{5x-1}\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{5}{4}\left|\frac{x-1}{5x-1}\right|<\varepsilon$$

Note que: $|1-x|=|x-1|$ y $\left|\dfrac{x-1}{5x-1}\right|=\left|\dfrac{1}{5x-1}\right||x-1|$

$$\Rightarrow\ \left|\frac{1}{5x-1}\right||x-1|<\frac{4\varepsilon}{5}. \qquad \textbf{(D2-1.8)}$$

En este caso, la única asíntota es $x=1/5$.

Encontrando el valor de δ_1

$$\delta_1=\frac{1}{2}\left|1-\frac{1}{5}\right|=\frac{2}{5}.$$

Acotando a partir de δ_1

$$|x-1| < \frac{2}{5}.$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{5} < x-1 < \frac{2}{5} \;\Rightarrow\; \frac{3}{5} < x < \frac{7}{5} \Rightarrow 3 < 5x < 7 \;\Rightarrow\; 2 < 5x-1 < 6 \;\Rightarrow\; \frac{1}{6} < \frac{1}{5x-1} < \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1}{5x-1}\right| < \frac{1}{2} = M. \qquad \textbf{(D3-1.8)}$$

Multiplicando las desigualdades **(D1-1.8)** y **(D3-1.8)**, se tiene que:

$$\left|\frac{1}{5x-1}\right| |x-1| < \frac{\delta}{2}. \qquad \textbf{(D4-1.8)}$$

Comparando las desigualdades **(D2-1.8)** y **(D4-1.8)**, se obtiene:

$$\frac{\delta}{2} = \frac{4\varepsilon}{5} \;\Rightarrow\; \delta = \frac{8\varepsilon}{5} \;\Rightarrow\; \delta = \min\left(\frac{2}{5}, \frac{8\varepsilon}{5}\right).$$

Esto demuestra que: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{[\![x-(1/5)]\!]+1}{|5x-1|} = \dfrac{1}{4}.$

La figura 1.12, muestra que el límite de $f(x) = 1/(5x-1)$ cuando x tiende a 1, es $1/4$. Para este caso, la recta $x = 1/5 = 0.2$ representa una asíntota vertical de la función; esto indica, que a medida que x se aproxima a 0.2 por la derecha, el valor de $f(x)$ tiende a ser muy grande.

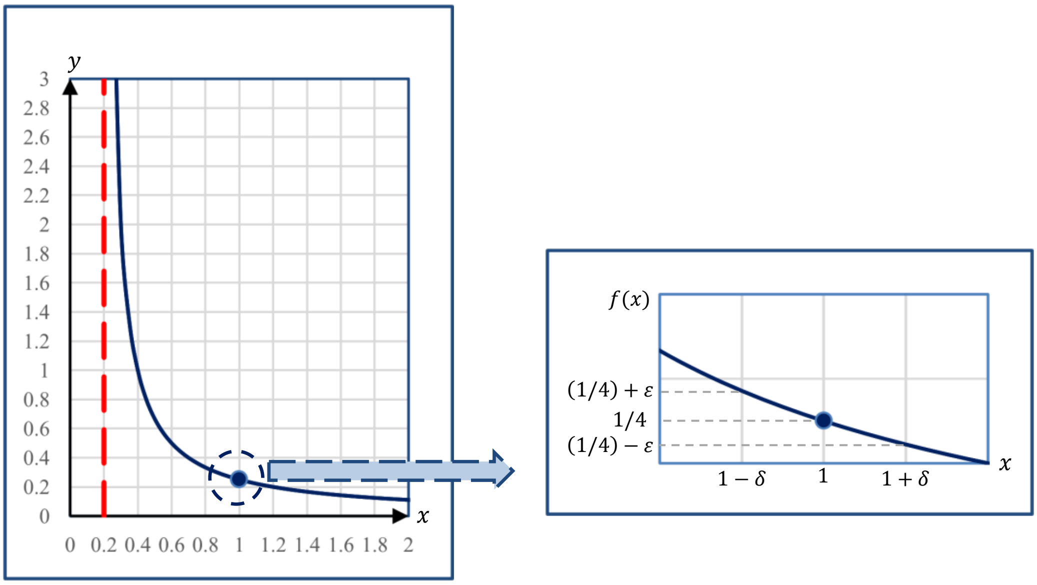


Figura 1.12. Ilustración gráfica del límite de $f(x) = 1/(5x-1)$, cuando x tiende a 1.

Ejemplo 1.9. Demostrar que: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{1}{2}.$

Solución.

Aplicando la definición de límite

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[(\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0)/\left(x\in(\mathbb{R}-\{2,3\})\wedge\underbrace{0<|x-1|<\delta}_{\text{Hipótesis}}\right)\Rightarrow\underbrace{\left|\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon}_{\text{Tesis}}\right]$$

$$|x-1|<\delta. \qquad \textbf{(D1-1.9)}$$

$$\left|\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\ \Rightarrow\ \left|\frac{2-(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x-3)}\right|<\varepsilon\ \Rightarrow\ \left|\frac{-x^2+5x-4}{2(x-2)(x-3)}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\ \left|\frac{x^2-5x+4}{2(x-2)(x-3)}\right|<\varepsilon\ \Rightarrow\ \left|\frac{(x-1)(x-4)}{2(x-2)(x-3)}\right|<\varepsilon\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}|x-1||x-4|\left|\frac{1}{x-2}\right|\left|\frac{1}{x-3}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\ |x-1||x-4|\left|\frac{1}{x-2}\right|\left|\frac{1}{x-3}\right|<2\varepsilon. \qquad \textbf{(D2-1.9)}$$

La asíntota más cercana a 1 es $x=2$, entonces:

$$\delta_1=\frac{1}{2}|1-2|=\frac{1}{2}.$$

Acotando a partir de δ_1

$$|x-1|<\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ -\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ -\frac{7}{2}<x-4<-\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow\ |x-4|<\frac{7}{2}. \qquad \textbf{(D3-1.9)}$$

$$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ -\frac{3}{2}<x-2<-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ -2<\frac{1}{x-2}<-\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\ \left|\frac{1}{x-2}\right|<2. \qquad \textbf{(D4-1.9)}$$

$$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ -\frac{5}{2}<x-3<-\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ -\frac{2}{3}<\frac{1}{x-3}<-\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow\ \left|\frac{1}{x-3}\right|<\frac{2}{3}. \qquad \textbf{(D5-1.9)}$$

Multiplicando **(D1-1.9)**, **(D3-1.9)**, **(D4-1.9)** y **(D5-1.9)**, se tiene:

$$\Rightarrow\ |x-1||x-4|\left|\frac{1}{x-2}\right|\left|\frac{1}{x-3}\right|<2\delta\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\ |x-1||x-4|\left|\frac{1}{x-2}\right|\left|\frac{1}{x-3}\right|<\frac{14}{3}\delta. \qquad \textbf{(D6-1.9)}$$

Comparando las desigualdades **(D2-1.9)** y **(D6-1.9)**, se tiene que:

$$\frac{14}{3}\delta=2\varepsilon\ \Rightarrow\ \delta=\frac{3\varepsilon}{7}\ \Rightarrow\ \delta=\min\left(\frac{1}{2},\frac{3\varepsilon}{7}\right).$$

Por lo tanto queda demostrado que: $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{2}$.

Ejemplo 1.10. Un joyero ajusta un anillo de tal manera que su circunferencia interna es de 6 cm.

a) ¿Cuál es el radio del anillo?

b) Si la circunferencia interna del anillo puede variar entre 5.5 y 6.5 centímetros, ¿cuánto puede variar su radio?

c) Utilizar la definición de límite para describir esta situación e identificar δ y ε.

Solución.

a)

La longitud de una circunferencia es: $L_C = 2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia. Entonces el radio del anillo es:

$$r = \frac{L_C}{2\pi} = \frac{6}{2\pi} = 0.9549 \text{ cm.}$$

b)

Si L puede variar entre 5.5 y 6.5 centímetros, entonces:

$$5.5 < L_C < 6.5 \Rightarrow 5.5 < 2\pi r < 6.5 \Rightarrow \frac{5.5}{2\pi} < r < \frac{6.5}{2\pi} \Rightarrow 0.8754 < r < 1.0345$$

Esto indica, que el radio del anillo puede variar entre 0.8754 y 1.0345 centímetros.

c)

$$5.5 < L_C < 6.5 \Rightarrow 6 - 0.5 < L_C < 6 + 0.5 \Rightarrow -0.5 < L_C - 6 < 0.5$$

$$\Rightarrow 0 < |L_C - 6| < 0.5. \qquad \textbf{(D1-1.10)}$$

$$\frac{5.5}{2\pi} < r < \frac{6.5}{2\pi} \Rightarrow \frac{6-0.5}{2\pi} < r < \frac{6+0.5}{2\pi} \Rightarrow -\frac{0.5}{2\pi} < r - \frac{6}{2\pi} < \frac{0.5}{2\pi}$$

$$\Rightarrow -0.0796 < r - 0.9549 < 0.0796 \Rightarrow 0 < |r - 0.9549| < 0.0796. \qquad \textbf{(D2-1.10)}$$

De las desigualdades **(D1-1.10)** y **(D2-1.10)**, se puede concluir que:

$$\lim_{r \to 0.9549} L_C = \lim_{r \to 0.9549} (2\pi r) = 6\,.$$

Donde $\delta = 0.0796$ y $\varepsilon = 0.5$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Figueroa, “Análisis Matemático 1”, 4th ed., Lima-Perú: Ediciones RFG, 2011, pp. 139-163.

[2] E. Espinoza, “Análisis Matemático I”, 3rd ed., Lima-Perú, 2002, pp. 325-336.

[3] J. L. Díaz, “Límites y Continuidad”, versión 1, Universidad de Sonora, División de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas, abril del 2005, pp. 3-10.

[4] R. Larson, R. P. Hostetler y B. H. Edwards, “Cálculo”, 8th ed., Impreso en China: McGraw-Hill Interamericana, 2006, pp. 48-58.

[5] M. Lázaro, “Límites y Continuidad”, 2nd ed., Lima-Perú: Editorial Moshera, abril del 2009, pp. 41-90.

[6] A. Venero, “Análisis Matemático 1”, 2nd ed., Lima-Perú: Representaciones Gemar E.I.R.L., 2016, pp. 13, 234-259.

EJERCICIOS PROPUESTOS

GRUPO 1

En los ejercicios del 1 al 6, completar la tabla y utilizar el resultado para estimar el límite.

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-x-2}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$						

2. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{1-x}-2}{x+3}$

x	-3.1	-3.01	-3.001	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$						

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

x	1.995	1.996	1.997	1.998	1.999	2.001	2.002	2.003	2.004	2.005
$f(x)$										

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

6. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$

x	-0.02	-0.015	-0.01	-0.005	0.005	0.01	0.015	0.02
$f(x)$								

En los ejercicios del 7 al 20, demostrar que existe límite.

7. $\lim\limits_{x \to 0}(4x^2-2x+1) = 1$

8. $\lim\limits_{x \to -2}(3-x^2) = -1$

9. $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^3 = 1,\ x \in ([-1,0\rangle \cup \langle 0,1])$

10. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{3}$

11. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{5-x^2} = 1$

12. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{4-x} = \sqrt{2}$

13. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{1}{5},\ x \in ([0,9\rangle \cup \langle 9,+\infty\rangle)$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-x}{5x^2-4x} = \dfrac{1}{4}$

15. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x}{x^2-4} = -\dfrac{3}{5}$

16. $\lim\limits_{x \to 3/2} \left(\dfrac{2-x}{|x| - [\![x]\!]}\right) = 1$

17. $\lim\limits_{x \to 1/2} \left(\dfrac{3x-2}{2-|x+1|}\right) = -1$

18. $\lim\limits_{x \to 1/4} \sqrt{|x| - [\![x]\!]} = \dfrac{1}{2}$

19. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{|x|-2} = 1, x \neq \pm 2$

20. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3} = -6, x \neq -3$

En los ejercicios del 21 al 24, determinar el valor de $\delta > 0$, para el valor de ε dado

21. $\lim\limits_{x\to 3} (7x+2) = 23, \quad \varepsilon = 0.07$

R. $\delta = 0.01$.

22. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-3) = 1, \quad \varepsilon = 0.01$

R. $\delta = 0.002$.

23. $\lim\limits_{x\to 3} (x^2-3x+5) = 5, \quad \varepsilon = 0.04$

R. $\delta = 0.01$.

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}, \quad \varepsilon = 0.013$

R. $\delta = 0.026$.

25. Un fabricante de artículos deportivos diseña una pelota de golf que tiene un volumen de 2.5 pulg^3. Si el volumen puede variar entre 2.48 y 2.52 pulg^3 . Utilizar la definición de límite para describir esta situación e identificar δ y ε.

R. $\lim\limits_{r\to 0.842} V = \lim\limits_{r\to 0.842} \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 2.5$, $\delta \cong 0.002$ y $\varepsilon \cong 0.02$.

1.2.3. UNICIDAD DEL LÍMITE

Teorema 1.1. El límite de una función existe y es único [1, 2], es decir:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \text{ y } \lim_{x\to x_0} f(x) = L_2, \text{ se verifica que } L_1 = L_2. \tag{1.12}$$

Ejemplo 1.11. Demostrar el enunciado **(1.12)**

Solución.

Si $\forall\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2, \exists\delta_1 > 0, \exists\delta_2 > 0$. Entonces de la definición de límite se tiene que:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$$

$$\Leftrightarrow [(\forall\varepsilon_1 > 0, \exists\delta_1 > 0)/(x \in \text{Dom}(f) \wedge 0 < |x-x_0| < \delta_1) \Rightarrow |f(x)-L_1| < \varepsilon_1]. \quad \textbf{(D1-1.11)}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$$

$$\Leftrightarrow [(\forall\varepsilon_2 > 0, \exists\delta_2 > 0)/(x \in \text{Dom}(f) \wedge 0 < |x-x_0| < \delta_2) \Rightarrow |f(x)-L_2| < \varepsilon_2]. \quad \textbf{(D2-1.11)}$$

Como x_0 es un punto de acumulación del $\text{Dom}(f)$, f debe estar definida en algún punto $x_1 = x_0$ del intervalo $\langle x_0-\delta_1, x_0+\delta_1\rangle \cap \langle x_0-\delta_2, x_0+\delta_2\rangle$, entonces si este punto $x_1 \in \text{Dom}(f)$, se satisface:

$$0 < |x-x_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

$$|L_1-L_2| = |L_1 - f(x_1) - L_2 + f(x_1)| = |-[f(x_1)-L_1] + [f(x_1)-L_2]|$$

Por la desigualdad triangular se tiene que:

$$|L_1-L_2| \leq |f(x_1)-L_1| + |f(x_1)-L_2|. \quad \textbf{(D3-1.11)}$$

De las desigualdades **(D1-1.11)**, **(D2-1.11)** y **(D3-1.11)** se deduce que:

$|L_1-L_2| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \Rightarrow |L_1-L_2| < \varepsilon$, además $\varepsilon > 0 \Rightarrow L_1 - L_2 = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$. Por lo tanto, queda demostrado que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \text{ y } \lim_{x \to x_0} f(x) = L_2, \text{ se verifica que } L_1 = L_2.$$

1.2.4. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN INTERMEDIA O TEOREMA DEL SÁNDWICH

Teorema 1.2. Sean la vecindad $V_\delta^*(x_0)$ y las funciones f, g y h, tales que $x \in V_\delta^*(x_0)$, $\delta > 0$. Donde f representa la función intermedia entre h y g [1–3] (véase la figura 1.13), entonces se cumple que:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x). \quad \textbf{(1.13)}$$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L. \quad \textbf{(1.14)}$$

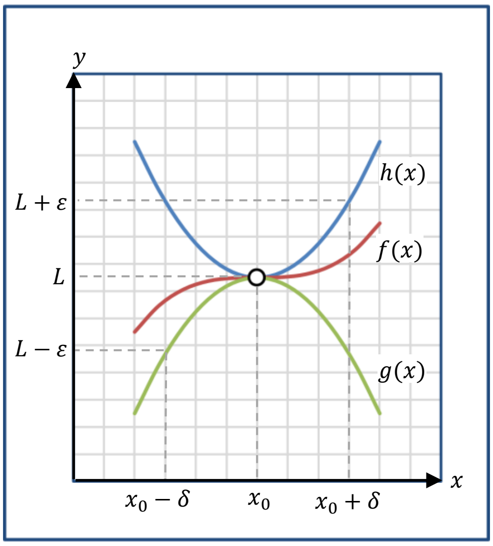


Figura 1.13. Ilustración gráfica del teorema de sándwich.

Ejemplo 1.12. Demostrar el teorema de sándwich.

Solución.

Sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tales que si $0 < |x - x_0| < \delta$ satisface la desigualdad **(1.13)**

Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_1 > 0$, tal que:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

$$\Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0)/\left(x \in V_{\delta_1}^*(x_0) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta_1\right) \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon\right].$$

$$|h(x) - L| < \varepsilon. \quad \textbf{(D1-1.12)}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

$$\Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0)/\left(x \in V_{\delta_2}^*(x_0) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta_2\right) \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon\right]$$

$$|g(x) - L| < \varepsilon. \quad \textbf{(D2-1.12)}$$

Eligiendo δ_1 y δ_2 tan pequeños que las vecindades $V^*_{\delta_1}(x_0)$ y $V^*_{\delta_2}(x_0)$ están contenidas en la vecindad $V^*_{\delta}(x_0)$ y si δ es el más pequeño entre δ_1 y δ_2, es decir: $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Entonces para que $x \in V^*_{\delta}(x_0)$, $\delta > 0$ se cumplen **(D1-1.12)** y **(D2-1.12)**, de lo cual se tiene que:

$$[|h(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon] \wedge [|g(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon]$$

$$\Rightarrow [L - \varepsilon < h(x) \wedge g(x) < \varepsilon + L].$$

Como $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, entonces:

$$L - \varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < \varepsilon + L \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \qquad \textbf{(D3-1.12)}$$

La desigualdad **(D3-1.12)**, indica que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Por lo tanto, queda demostrado el teorema de sándwich.

1.3. PROPIEDADES OPERACIONALES DEL LÍMITE

Sean f y g dos funciones reales, tales que: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$. Figueroa [1], Mitacc y Toro [2], Venero [3] y Espinoza [4], mencionan que, para empezar a calcular los límites, es necesario conocer las siguientes propiedades y ecuaciones que se dan a continuación:

a) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \pm M$

b) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \cdot M$

c) $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \left[\dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}\right] = \left[\dfrac{L}{M}\right] = \dfrac{L}{M},\ M \neq 0$

d) $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \left[\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}\right]^{-1} = \left[\dfrac{\lim\limits_{x \to a} g(x)}{\lim\limits_{x \to a} f(x)}\right]^{-1} = \left[\dfrac{M}{L}\right]^{-1} = \dfrac{L}{M},\ M \neq 0$

e) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n,\ n \in \mathbb{R}$

f) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L},\ n \in \mathbb{R}$

g) $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x \to a} f(x)\right| = |L|.$

También, es necesario conocer lo siguiente:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = (x^{n-1} + yx^{n-2} + y^2x^{n-3} + \cdots\cdots + y^{n-1}),\ n \in \mathbb{Z}^+ \qquad \textbf{(1.15)}$$

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = (x^{n-1} - yx^{n-2} + y^2x^{n-3} - \cdots\cdots - y^{n-1}),\ n \text{ es par} \qquad \textbf{(1.16)}$$

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = (x^{n-1} - yx^{n-2} + y^2x^{n-3} - \cdots\cdots + y^{n-1}),\ n \text{ es impar} \qquad \textbf{(1.17)}$$

$$\frac{x-y}{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}}=\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{y}\,\sqrt[n]{x^{n-2}}+\sqrt[n]{y^2}\,\sqrt[n]{x^{n-3}}+\cdots\cdots+\sqrt[n]{y^{n-1}}\right),\ n\in\mathbb{Z}^+$$

$$=\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{yx^{n-2}}+\sqrt[n]{y^2x^{n-3}}+\cdots\cdots+\sqrt[n]{y^{n-1}}\right),\ n\in\mathbb{Z}^+ \quad \textbf{(1.18)}$$

$$\frac{x-y}{\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}}=\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{y}\,\sqrt[n]{x^{n-2}}+\sqrt[n]{y^2}\,\sqrt[n]{x^{n-3}}-\cdots\cdots-\sqrt[n]{y^{n-1}}\right),\ n\text{ es par}$$

$$=\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{yx^{n-2}}+\sqrt[n]{y^2x^{n-3}}-\cdots\cdots-\sqrt[n]{y^{n-1}}\right),\ n\text{ es par} \quad \textbf{(1.19)}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}}=\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{y}\,\sqrt[n]{x^{n-2}}+\sqrt[n]{y^2}\,\sqrt[n]{x^{n-3}}-\cdots\cdots+\sqrt[n]{y^{n-1}}\right),\ n\text{ es impar}$$

$$=\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{yx^{n-2}}+\sqrt[n]{y^2x^{n-3}}-\cdots\cdots+\sqrt[n]{y^{n-1}}\right),\ n\text{ es impar} \quad \textbf{(1.20)}$$

1.4. LÍMITES DE LA FORMA $\frac{0}{0}$

Los límites de la forma $0/0$, son de funciones racionales en la cual al reemplazar directamente el valor de x, resultan cero tanto el numerador como el denominador.

El cálculo de estos tipos de límites consiste en aplicar artificios algebraicos, de manera que se elimine el factor que hace cero el denominador cuando se reemplaza directamente el valor de x; para esto, también se debe tratar de que ese factor aparezca en el numerador.

Ejemplo 1.13. Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}\right]$.

Solución.

Aplicando la ecuación **(1.18)**, se tiene:

$$\sqrt[8]{x}-1=\frac{\left(\sqrt[8]{x}-1\right)\left(\sqrt[8]{x^7}+\sqrt[8]{x^6}+\sqrt[8]{x^5}+\sqrt[8]{x^4}+\sqrt[8]{x^3}+\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[8]{x^7}+\sqrt[8]{x^6}+\sqrt[8]{x^5}+\sqrt[8]{x^4}+\sqrt[8]{x^3}+\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{x}+1\right)}$$

$$=\frac{x-1}{\left(\sqrt[8]{x^7}+\sqrt[8]{x^6}+\sqrt[8]{x^5}+\sqrt[8]{x^4}+\sqrt[8]{x^3}+\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{x}+1\right)}.$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x}-1}=\frac{\left(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[5]{x}-1\right)\left(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1\right)}{x-1}.$$

Como se puede dar cuenta, el factor que hace cero el denominador es: $(x-1)$

Este factor debe aparecer en el numerador y denominador, de manera que pueda eliminarse

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[8]{x^7}+\sqrt[8]{x^6}+\sqrt[8]{x^5}+\sqrt[8]{x^4}+\sqrt[8]{x^3}+\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{x}+1\right)}=L$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[8]{x^7}+\sqrt[8]{x^6}+\sqrt[8]{x^5}+\sqrt[8]{x^4}+\sqrt[8]{x^3}+\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{x}+1\right)}$$

Aplicando la propiedad **c)**

$$L=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt[8]{x^7}+\sqrt[8]{x^6}+\sqrt[8]{x^5}+\sqrt[8]{x^4}+\sqrt[8]{x^3}+\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[8]{x}+1\right)}=\frac{5}{8}.$$

Wolfram Research [5], indica que, para calcular el límite de una función con el programa Wolfram Mathematica, la sintaxis es:

$$\text{Limit}\ [expr,\ x\to x_0]. \qquad \textbf{(1.21)}$$

Entonces, para este ejemplo, el cálculo del límite con el programaWolfram Mathematica, es como sigue:

In[1]:= $\texttt{Limit}\left[\dfrac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1},\ x\to 1\right]$

límite

Out[1]= $\dfrac{5}{8}$

Ejemplo 1.14. Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{\sqrt[5]{8x^2}+\sqrt[5]{4x^3}}{x^4-16}\right)$.

Solución.

Aplicando la ecuación **(1.20)** en el numerador y la ecuación **(1.16)** en el denominador, se tiene:

$$\sqrt[5]{8x^2}+\sqrt[5]{4x^3}=\frac{8x^2+4x^3}{\underbrace{\sqrt[5]{(8x^2)^4}-\sqrt[5]{4x^3(8x^2)^3}+\sqrt[5]{(4x^3)^2(8x^2)^2}-\sqrt[5]{8x^2(4x^3)^3}+\sqrt[5]{(4x^3)^4}}_{\text{CG1}}}=\frac{8x^2+4x^3}{\text{CG1}}$$

$$x^4-16=x^4-2^4=(x+2)(x^3-2x^2+4x-8)$$

Entonces, el límite queda:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\left(\frac{\sqrt[5]{8x^2}+\sqrt[5]{4x^3}}{x^4-16}\right)&=\lim_{x\to -2}\frac{8x^2+4x^3}{(x+2)(x^3-2x^2+4x-8)(\text{CG1})}\\&=\lim_{x\to -2}\frac{4x^2(2+x)}{(x+2)(x^3-2x^2+4x-8)(\text{CG1})}\\&=\lim_{x\to -2}\frac{4x^2}{(x^3-2x^2+4x-8)(\text{CG1})}=\frac{16}{(-8-8-8-8)(80)}\\&=-\frac{16}{(32)(80)}=-\frac{1}{160}.\end{aligned}$$

Si $x\to -2$, entonces $\lim\limits_{x\to -2}(\text{CG1})=16+16+16+16+16=80$.

Como $x\to -2$, el valor de la expresión $\sqrt[5]{4x^3}$ es negativo: $\sqrt[5]{4(-2)^3}=\sqrt[5]{-32}=-2$. Los programas matemáticos como Wolfram Mathematica y Matlab, no aceptan a las raíces con índices impares de números negativos como números reales, entonces a la expresión $\sqrt[5]{4x^3}$ se le puede escribir: $-\sqrt[5]{-4x^3}$.

De esta manera la cantidad que está dentro de la raíz será una cantidad positiva, es decir: $-4(-2)^3 = 32$.

Entonces, el cálculo del límite con Wolfram Mathematica es:

```
In[2]:= Limit[(Surd[8 x^2, 5] - Surd[-4 x^3, 5])/(x^4 - 16), x -> -2]
        límite
Out[2]= -1/160
```

Ejemplo 1.15. Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[5]{x^5+1}+x^2-2}{x-x\sqrt{x+1}}$.

Solución.

Como se puede dar cuenta, no se puede racionalizar directamente. Para este caso se deben agrupar las expresiones algebraicas, de manera que cada expresión algebraica se haga cero al reemplazar el valor de x, tal como se muestra a continuación.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[5]{x^5+1}+x^2-2}{x-x\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-1\right)+\left(\sqrt[5]{x^5+1}-1\right)+x^2}{x-x\sqrt{x+1}}=L$$

Aplicando la propiedad **a)**

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-1\right)}{x-x\sqrt{x+1}}+\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[5]{x^5+1}-1\right)}{x-x\sqrt{x+1}}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-x\sqrt{x+1}}$$

Calculando los límites por separado

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-1\right)}{x-x\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-1\right)}{x\left(1-\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^3)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{x(-x)\left[\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+1}+1\right]}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{(x)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\left[\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+1}+1\right]}=-\frac{(0)\left(1+\sqrt{0+1}\right)}{\left[\sqrt[3]{(0^3+1)^2}+\sqrt[3]{0^3+1}+1\right]}=0.$$

```
In[3]:= L1 = Limit[(Surd[x^3 + 1, 3] - 1)/(x - x Sqrt[x + 1]), x -> 0]
             límite
Out[3]= 0
```

$$L_2=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[5]{x^5+1}-1\right)}{x-x\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[5]{x^5+1}-1\right)}{x\left(1-\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^5)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{x(-x)\left[\sqrt[5]{(x^5+1)^4}+\sqrt[5]{(x^5+1)^3}+\sqrt[5]{(x^5+1)^2}+\sqrt[5]{(x^5+1)}+1\right]}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{(x^3)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\left[\sqrt[5]{(x^5+1)^4}+\sqrt[5]{(x^5+1)^3}+\sqrt[5]{(x^5+1)^2}+\sqrt[5]{(x^5+1)}+1\right]}$$

$$= -\frac{(0^3)(1+\sqrt{0+1})}{\left[\sqrt[5]{(0^5+1)^4}+\sqrt[5]{(0^5+1)^3}+\sqrt[5]{(0^5+1)^2}+\sqrt[5]{(0^5+1)}+1\right]} = 0.$$

```
In[4]:= L2 = Limit[ (5√(x^5 + 1) - 1) / (x - x √(x + 1)) , x → 0]
             límite
Out[4]= 0
```

$$L_3 = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x - x\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(1-\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\sqrt{x+1})}{x(-x)} = -\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{x+1}\right)$$

$$= -\left(1+\sqrt{0+1}\right) = -(1+1) = -2$$

```
In[5]:= L3 = Limit[ x^2 / (x - x √(x + 1)) , x → 0]
             límite
Out[5]= -2
```

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 0 + 0 - 2 = -2.$$

```
In[6]:= L = Limit[ (3√(x^3 + 1) + 5√(x^5 + 1) + x^2 - 2) / (x - x √(x + 1)) , x → 0]
            límite
Out[6]= -2
```

Ejemplo 1.16. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7x+2}-\sqrt[3]{5x^2+7}-\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{5x-2}+\sqrt{x+2}-2x}$.

Solución.

Aplicando el mismo criterio del ejemplo anterior.

$$L = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7x+2}-\sqrt[3]{5x^2+7}-\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{5x-2}+\sqrt{x+2}-2x}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{7x+2}-4\right)+\left(3-\sqrt[3]{5x^2+7}\right)+\left(1-\sqrt[4]{x-1}\right)}{\left(\sqrt[3]{5x-2}-2\right)+\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(4-2x)}.$$

Aplicando la propiedad **a)**

$$L_1 = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{7x+2}-4\right)}{\left(\sqrt[3]{5x-2}-2\right)+\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(4-2x)}.$$

$$L_2 = \lim_{x\to 2}\frac{\left(3-\sqrt[3]{5x^2+7}\right)}{\left(\sqrt[3]{5x-2}-2\right)+\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(4-2x)}.$$

$$L_3 = \lim_{x\to 2}\frac{\left(1-\sqrt[4]{x-1}\right)}{\left(\sqrt[3]{5x-2}-2\right)+\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(4-2x)}.$$

Evaluando cada límite por separado y aplicando la propiedad **d)**

$$L_1 = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{7x+2}-4\right)}{\left(\sqrt[3]{5x-2}-2\right)+\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(4-2x)}$$

$$= \left[\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt[3]{5x-2}-2\right)+\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(4-2x)}{\left(\sqrt{7x+2}-4\right)}\right]^{-1}$$

$$= \left[\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt[3]{5x-2}-2\right)}{\left(\sqrt{7x+2}-4\right)} + \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)}{\left(\sqrt{7x+2}-4\right)} + \lim_{x\to 2} \frac{(4-2x)}{\left(\sqrt{7x+2}-4\right)}\right]^{-1}.$$

Calculando por separado los límites que están dentro del corchete

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt[3]{5x-2}-2\right)}{\left(\sqrt{7x+2}-4\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(5x-10)\left(\sqrt{7x+2}+4\right)}{(7x-14)\left[\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4\right]}$$

$$= \frac{5}{7}\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{7x+2}+4\right)}{(x-2)\left[\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4\right]}$$

$$= \frac{5}{7}\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{7x+2}+4\right)}{\left[\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4\right]}$$

$$= \frac{5}{7}\frac{\left(\sqrt{7(2)+2}+4\right)}{\left[\sqrt[3]{(5(2)-2)^2}+2\sqrt[3]{5(2)-2}+4\right]} = \frac{5}{7}\frac{(4+4)}{[4+4+4]} = \frac{10}{21}.$$

In[7]:= $\text{Limit}\left[\frac{\sqrt[3]{5\,x-2}-2}{\sqrt{7\,x+2}-4},\ x \to 2\right]$

límite

Out[7]= $\frac{10}{21}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)}{\left(\sqrt{7x+2}-4\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{7x+2}+4\right)}{(7x-14)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{1}{7}\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{7x+2}+4\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$= \frac{1}{7}\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{7x+2}+4\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{1}{7}\frac{\left[\sqrt{7(2)+2}+4\right]}{\left(\sqrt{2+2}+2\right)}$$

$$= \frac{1}{7}\frac{(4+4)}{(2+2)} = \frac{2}{7}.$$

In[8]:= $\text{Limit}\left[\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{7\,x+2}-4},\ x \to 2\right]$

límite

Out[8]= $\frac{2}{7}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(4-2x)}{\left(\sqrt{7x+2}-4\right)}=-2\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{7x+2}+4\right)}{(7x-14)}=-\frac{2}{7}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{7x+2}+4\right)}{(x-2)}$$

$$=-\frac{2}{7}\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{7x+2}+4\right)=-\frac{2}{7}\left[\sqrt{7(2)+2}+4\right]=-\frac{2}{7}(4+4)=-\frac{16}{7}.$$

In[9]:= $\text{Limit}\left[\frac{4-2x}{\sqrt{7x+2}-4},\ x\to 2\right]$
límite

Out[9]= $-\frac{16}{7}$

$$\Rightarrow L_1=\left(\frac{10}{21}+\frac{2}{7}-\frac{16}{7}\right)^{-1}=\left(-\frac{32}{21}\right)^{-1}=-\frac{21}{32}.$$

In[10]:= $L_1=\text{Limit}\left[\frac{\sqrt{7x+2}-4}{\left(\sqrt[3]{5x-2}-2\right)+\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(4-2x)},\ x\to 2\right]$
límite

Out[10]=
$-\frac{21}{32}$

$$L_2=\lim_{x\to 2}\frac{\left(3-\sqrt[3]{5x^2+7}\right)}{\left(\sqrt[3]{5x-2}-2\right)+\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(4-2x)}$$

$$=\left[\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{5x-2}-2\right)+\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(4-2x)}{\left(3-\sqrt[3]{5x^2+7}\right)}\right]^{-1}$$

$$=\left[\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{5x-2}-2\right)}{\left(3-\sqrt[3]{5x^2+7}\right)}+\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)}{\left(3-\sqrt[3]{5x^2+7}\right)}+\lim_{x\to 2}\frac{(4-2x)}{\left(3-\sqrt[3]{5x^2+7}\right)}\right]^{-1}.$$

Calculando por separado los límites que están dentro del corchete

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{5x-2}-2\right)}{\left(3-\sqrt[3]{5x^2+7}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(5x-10)\left[9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}\right]}{(20-5x^2)\left[\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left[9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}\right]}{(4-x^2)\left[\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4\right]}$$

$$=-\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left[9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}\right]}{(x-2)(2+x)\left[\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4\right]}$$

$$=-\lim_{x\to 2}\frac{\left[9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}\right]}{(x+2)\left[\sqrt[3]{(5x-2)^2}+2\sqrt[3]{5x-2}+4\right]}$$

$$=-\frac{\left[9+3\sqrt[3]{5(2)^2+7}+\sqrt[3]{[5(2)^2+7]^2}\right]}{(2+2)\left[\sqrt[3]{[5(2)-2]^2}+2\sqrt[3]{5(2)-2}+4\right]}=-\frac{(27)}{(4)(12)}=-\frac{9}{16}.$$

```
In[11]:= Limit[(CubeRoot[5 x - 2] - 2)/(3 - CubeRoot[5 x^2 + 7]), x -> 2]
límite
Out[11]= -9/16
```

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)}{\left(3-\sqrt[3]{5x^2+7}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left[9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}\right]}{(20-5x^2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=-\frac{1}{5}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left[9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}\right]}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=-\frac{1}{5}\lim_{x\to 2}\frac{\left[9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}\right]}{(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=-\frac{1}{5}\frac{\left[9+3\sqrt[3]{5(2)^2+7}+\sqrt[3]{[5(2)^2+7]^2}\right]}{(2+2)\left(\sqrt{2+2}+2\right)}=-\frac{1}{5}\frac{(9+9+9)}{(2+2)(2+2)}$$

$$=-\frac{27}{80}.$$

```
In[12]:= Limit[(Sqrt[x + 2] - 2)/(3 - CubeRoot[5 x^2 + 7]), x -> 2]
límite
Out[12]= -27/80
```

$$\lim_{x\to 2}\frac{(4-2x)}{\left(3-\sqrt[3]{5x^2+7}\right)}=-2\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left[9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}\right]}{(20-5x^2)}$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left[9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}\right]}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 2}\frac{\left[9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt[3]{(5x^2+7)^2}\right]}{(x+2)}=\frac{2}{5}\frac{(9+9+9)}{(2+2)}=\frac{27}{10}.$$

```
In[13]:= Limit[(4 - 2 x)/(3 - CubeRoot[5 x^2 + 7]), x -> 2]
límite
Out[13]= 27/10
```

$$\Rightarrow L_2 = \left(-\frac{9}{16} - \frac{27}{80} + \frac{27}{10}\right)^{-1} = \left(-\frac{9}{16} + \frac{189}{80}\right)^{-1} = \left(\frac{144}{80}\right)^{-1} = \frac{80}{144} = \frac{5}{9}.$$

```
In[14]:= L2 = Limit[(3 - ∛(5 x^2 + 7)) / ((∛(5 x - 2) - 2) + (√(x + 2) - 2) + (4 - 2 x)), x → 2]
          límite
Out[14]= 5/9
```

$$L_3 = \lim_{x\to 2} \frac{\left(1 - \sqrt[4]{x-1}\right)}{\left(\sqrt[3]{5x-2} - 2\right) + \left(\sqrt{x+2} - 2\right) + (4 - 2x)}$$

$$= \left[\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt[3]{5x-2} - 2\right) + \left(\sqrt{x+2} - 2\right) + (4 - 2x)}{\left(1 - \sqrt[4]{x-1}\right)}\right]^{-1}$$

$$= \left[\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt[3]{5x-2} - 2\right)}{\left(1 - \sqrt[4]{x-1}\right)} + \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2} - 2\right)}{\left(1 - \sqrt[4]{x-1}\right)} + \lim_{x\to 2} \frac{(4 - 2x)}{\left(1 - \sqrt[4]{x-1}\right)}\right]^{-1}.$$

Calculando por separado los límites que están dentro del corchete

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt[3]{5x-2} - 2\right)}{\left(1 - \sqrt[4]{x-1}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(5x - 10)\left[1+\sqrt[4]{(x-1)} + \sqrt[4]{(x-1)^2} + \sqrt[4]{(x-1)^3}\right]}{(2 - x)\left[\sqrt[3]{(5x-2)^2} + 2\sqrt[3]{5x-2} + 4\right]}$$

$$= -5\lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)\left[1+\sqrt[4]{(x-1)} + \sqrt[4]{(x-1)^2} + \sqrt[4]{(x-1)^3}\right]}{(x - 2)\left[\sqrt[3]{(5x-2)^2} + 2\sqrt[3]{5x-2} + 4\right]}$$

$$= -5\lim_{x\to 2} \frac{\left[1+\sqrt[4]{(x-1)} + \sqrt[4]{(x-1)^2} + \sqrt[4]{(x-1)^3}\right]}{\left[\sqrt[3]{(5x-2)^2} + 2\sqrt[3]{5x-2} + 4\right]}$$

$$= -\frac{5(1 + 1 + 1 + 1)}{(4 + 4 + 4)} = -\frac{5}{3}.$$

```
In[15]:= Limit[(∛(5 x - 2) - 2) / (1 - ∜(x - 1)), x → 2]
         límite
Out[15]= -5/3
```

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2} - 2\right)}{\left(1 - \sqrt[4]{x-1}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)\left[1+\sqrt[4]{(x-1)} + \sqrt[4]{(x-1)^2} + \sqrt[4]{(x-1)^3}\right]}{(2 - x)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}$$

$$= -\lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)\left[1+\sqrt[4]{(x-1)} + \sqrt[4]{(x-1)^2} + \sqrt[4]{(x-1)^3}\right]}{(x - 2)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}$$

$$= -\lim_{x\to 2}\frac{\left[1+\sqrt[4]{(x-1)}+\sqrt[4]{(x-1)^2}+\sqrt[4]{(x-1)^3}\right]}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = -\frac{(1+1+1+1)}{(2+2)} = -1.$$

```
In[16]:= Limit[(Sqrt[x + 2] - 2)/(1 - (x - 1)^(1/4)), x → 2]
         límite
Out[16]= -1
```

$$\lim_{x\to 2}\frac{(4-2x)}{\left(1-\sqrt[4]{x-1}\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left[1+\sqrt[4]{(x-1)}+\sqrt[4]{(x-1)^2}+\sqrt[4]{(x-1)^3}\right]}{(x-2)}$$

$$= 2\lim_{x\to 2}\left[1+\sqrt[4]{(x-1)}+\sqrt[4]{(x-1)^2}+\sqrt[4]{(x-1)^3}\right] = (2)(1+1+1+1) = 8$$

```
In[17]:= Limit[(4 - 2 x)/(1 - (x - 1)^(1/4)), x → 2]
         límite
Out[17]= 8
```

$$\Rightarrow L_3 = \left(-\frac{5}{3}-1+8\right)^{-1} = \left(-\frac{5}{3}+7\right)^{-1} = \left(\frac{16}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{16}.$$

```
In[18]:= L3 = Limit[(1 - (x - 1)^(1/4))/(((5 x - 2)^(1/3) - 2) + (Sqrt[x + 2] - 2) + (4 - 2 x)), x → 2]
              límite
Out[18]= 3/16
```

$$\Rightarrow L = L_1 + L_2 + L_3 = -\frac{21}{32}+\frac{5}{9}+\frac{3}{16} = \frac{-189+160+54}{288} = \frac{25}{288}.$$

```
In[19]:= Limit[(Sqrt[7 x + 2] - (5 x^2 + 7)^(1/3) - (x - 1)^(1/4))/((5 x - 2)^(1/3) + Sqrt[x + 2] - 2 x), x → 2]
         límite
Out[19]= 25/288
```

Ejemplo 1.17. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to 2}\frac{(fog)(x+1)}{(gof)(x+2)}$, si $f(x) = x-2$ y $g(x+1) = x^2 - x$.

Solución.

$$(fog)(x+1) = f[g(x+1)],\ (gof)(x+2) = g[f(x+2)].$$

$$g(x+1) = x^2 - x = [(x+1)-1]^2 - [(x+1)-1] \Rightarrow g(x) = (x-1)^2 - (x-1) = x^2 - 3x + 2.$$

Como $f(x) = x - 2$, entonces: $f[g(x+1)] = g(x+1) - 2 = x^2 - x - 2$.

$$f(x) = x - 2 \ \Rightarrow \ f(x+2) = x \ \Rightarrow \ g[f(x+2)] \ = g(x) = x^2 - 3x + 2.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(fog)(x+1)}{(gof)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)}{(x-1)} = \frac{(2+1)}{(2-1)} = 3.$$

Ejemplo 1.18. Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|x+1|^3 + |x + [\![x/8]\!]| - \sqrt{\sqrt[3]{7-x}+2}}{2 + \sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20} + 5\operatorname{sgn}(x^3 - 8)}}$.

Solución.

$x \to -1 \ \Rightarrow \ [\![-1/8]\!] = -1$ y $\operatorname{sgn}[(-1)^3 - 8] \ = \operatorname{sgn}(-9) = -1$.

Recuerde que: $-1 < -1/8 < 0 \ \Rightarrow \ [\![-1/8]\!] = -1$ y el signo de un número negativo es -1.

$$|x+1| = \begin{cases} -x-1, & x < -1 \\ \ \ x+1, & x \geq -1 \end{cases}$$

Para este caso, si x tiende a -1 por la izquierda $(x < -1)$, entonces: $|x+1| = -x-1$.

Si x tiende a -1 por la derecha $(x \geq -1)$, entonces: $|x+1| = x+1$.

Si $x \to -1 \ \Rightarrow \ |x + [\![x/8]\!]| = |x-1| = 1 - x$.

Si se aplica el límite para ambas reglas de correspondencia, se obtiene lo mismo:

$$\operatorname*{Lim}_{x\to -1}(x+1) = -1 + 1 = 0 \ \text{ y } \ \operatorname*{Lim}_{x\to -1}(-x-1) = -(-1) - 1 = 1 - 1 = 0$$

Esto indica que se puede elegir cualquiera de las reglas de correspondencias para $|x+1|$.

Eligiendo $|x+1| = x+1$.

Note que:

$|x-1| = \begin{cases} 1-x, & x < 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$, si $x \to -1$, entonces $|x-1| = 1-x$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1} \frac{|x+1|^3 + |x + [\![x/8]\!]| - \sqrt{\sqrt[3]{7-x}+2}}{2 + \sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20} + 5\operatorname{sgn}(x^3 - 8)}} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^3 + (1-x) - \sqrt{\sqrt[3]{7-x}+2}}{2 + \sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20} - 5}} = L$$

$$L = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^3 + (-1-x) + \left(2 - \sqrt{\sqrt[3]{7-x}+2}\right)}{2 + \sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20} - 5}}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^3}{2 + \sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20} - 5}}}_{L_1} - \underbrace{\lim_{x\to -1} \frac{(1+x)}{2 + \sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20} - 5}}}_{L_2} + \underbrace{\lim_{x\to -1} \frac{\left(2 - \sqrt{\sqrt[3]{7-x}+2}\right)}{2 + \sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20} - 5}}}_{L_3}$$

$$L = L_1 - L_2 + L_3.$$

Calculando los límites por separado

$$L_1 = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^3}{2+\sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20}-5}} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^3 \mathrm{CG1}}{27+9\sqrt[3]{7x-20}}$$

$$\mathrm{CG1} = \left[2^4 - (2^3)\sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20}-5} + (2^2)\sqrt[5]{\left(9\sqrt[3]{7x-20}-5\right)^2} - \cdots + \sqrt[5]{\left(9\sqrt[3]{7x-20}-5\right)^4}\right]$$

Si $x \to -1 \ \Rightarrow\ \mathrm{CG1} = (16+16+16+16+16) = 80.$

$$L_1 = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^3}{2+\sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20}-5}} = \frac{80}{9}\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^3}{\left(3+\sqrt[3]{7x-20}\right)} = \frac{80}{9}\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^3 \mathrm{CG2}}{(7x+7)}$$

$$= \frac{80}{63}\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^3 \mathrm{CG2}}{(x+1)}.$$

$\mathrm{CG2} = \left[(3^2) - 3\sqrt[3]{7x-20} + \sqrt[3]{(7x-20)^2}\right]$. Si $x \to -1 \ \Rightarrow\ \mathrm{CG2} = (9+9+9) = 27.$

$$L_1 = \frac{80}{63}\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^3 \mathrm{CG2}}{(x+1)} = \frac{(80)(27)}{63}\lim_{x\to -1}(x+1)^2 = \frac{(80)(3)}{7}(-1+1)^2 = \frac{240}{7}(0) = 0.$$

Resolviendo L_2 de la misma forma que L_1

$$L_2 = \lim_{x\to -1} \frac{(1+x)}{2+\sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20}-5}} = \frac{(80)(27)}{63}\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)}{(x+1)} = \frac{240}{7}.$$

$$L_3 = \lim_{x\to -1} \frac{\left(2-\sqrt{\sqrt[3]{7-x}+2}\right)}{2+\sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20}-5}} = \frac{(80)(27)}{63}\lim_{x\to -1}\frac{\left(2-\sqrt{\sqrt[3]{7-x}+2}\right)}{(x+1)}$$

$$= \frac{240}{7}\lim_{x\to -1}\frac{\left(2-\sqrt[3]{7-x}\right)}{(x+1)\left(2+\sqrt{\sqrt[3]{7-x}+2}\right)} = \frac{240}{7}\lim_{x\to -1}\frac{\left(2-\sqrt[3]{7-x}\right)}{(x+1)\mathrm{CG3}}$$

$$= \frac{240}{7}\lim_{x\to -1}\frac{\left(2-\sqrt[3]{7-x}\right)}{(x+1)(4)} = \frac{60}{7}\lim_{x\to -1}\frac{\left(2-\sqrt[3]{7-x}\right)}{(x+1)}.$$

$\mathrm{CG3} = 2+\sqrt{\sqrt[3]{7-x}+2}$. Si $x \to -1 \ \Rightarrow\ \mathrm{CG3} = 2+\sqrt{2+2} = 2+2 = 4.$

$$L_3 = \frac{60}{7}\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)}{(x+1)\left[(2^2)+2\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{(7-x)^2}\right]} = \frac{60}{7}\lim_{x\to -1}\frac{1}{\left[(2^2)+2\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{(7-x)^2}\right]}$$

$$= \frac{60}{(7)(12)} = \frac{5}{7}.$$

$$\Rightarrow\ L = L_1 - L_2 + L_3 = 0 - \frac{240}{7} + \frac{5}{7} = -\frac{235}{7}.$$

Como la expresión $9\sqrt[3]{7x-20}$ es negativa si $x \to -1$, entonces en Wolfram Mathematica se debe escribir: $-9\sqrt[3]{-(7x-20)}$.

De la misma forma, la expresión $\sqrt[5]{9\sqrt[3]{7x-20}+5\mathrm{sgn}(x^3-8)}$, se debe escribir: $-\sqrt[5]{-\left[-9\sqrt[3]{-(7x-20)}+5\mathrm{sgn}(x^3-8)\right]}$.

Entonces, el cálculo del límite con Wolfram Mathematica es:

In[19]:= Limit$\left[\dfrac{(\text{Abs}[x+1])^3+\text{Abs}[x+\text{Floor}[x/8]]-\sqrt{\sqrt[3]{7-x}+2}}{2-\sqrt[5]{-\left(-9\sqrt[3]{-(7x-20)}+5\,\text{Sign}\left[x^3-8\right]\right)}},\ x\to-1\right]$
límite

Out[19]=

$$-\frac{235}{7}$$

Ejemplo 1.19. Dado $f(x)=x^3$, hallar: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h\neq 0$.

Solución.

$f(x+h)=(x+h)^3$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]}{h}=\lim_{h\to 0}[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]$$

$$=[(x+0)^2+x(x+0)+x^2]=3x^2.$$

Ejemplo 1.20. Halle la posición límite del punto P cuando c tiende a 2, donde P es la intersección de las rectas: $\mathcal{L}_1$: $3x+4y=2$ y $\mathcal{L}_2$: $(2+5c)x+4c^2y=8$.

Solución.

Despejando y de las ecuaciones de las rectas:

$$y=\frac{2-3x}{4},\quad y=\frac{8-(2+5c)x}{4c^2}$$

Igualando las ecuaciones y despejando x:

$$\frac{8-(2+5c)x}{4c^2}=\frac{2-3x}{4}\quad\Rightarrow\quad 8-(2+5c)x=c^2(2-3x)\ \Rightarrow\ [3c^2-(2+5c)]x=2c^2-8$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{2c^2-8}{3c^2-5c-2}=\frac{2(c-2)(c+2)}{(3c+1)(c-2)}.$$

Calculando el límite para x e y cuando $c\to 2$, se tiene:

$$\lim_{c\to 2}x=\lim_{c\to 2}\left[\frac{2(c-2)(c+2)}{(3c+1)(c-2)}\right]=\lim_{c\to 2}\frac{2(c+2)}{3c+1}=\frac{2(2+2)}{6+1}=\frac{8}{7}.$$

$$\lim_{x\to\frac{8}{7}}y=\lim_{x\to\frac{8}{7}}\left(\frac{2-3x}{4}\right)=\frac{2-3\left(\frac{8}{7}\right)}{4}=\frac{2-\frac{24}{7}}{4}=\frac{14-24}{28}=-\frac{10}{28}=-\frac{5}{14}.$$

Estos cálculos indican que si c tiende a 2, x tiende a $8/7$ e y tiende a $-5/14$. Entonces, la posición límite del punto P cuando c tiende a 2, es:

$$P\left(\frac{8}{7},-\frac{5}{14}\right).$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Figueroa, “Análisis Matemático 1”, 4th ed., Lima-Perú: Ediciones RFG, 2011, pp. 167-202.

[2] M. Mitacc y L. Toro, “Tópicos de cálculo”, 3rd ed., vol. 1, Lima-Perú: Editorial Thales S.R.L., junio del 2009, pp. 118-133.

[3] A. Venero, “Análisis Matemático 1”, 2nd ed., Lima-Perú: Representaciones Gemar E.I.R.L., 2016, pp. 260-287.

[4] E. Espinoza, “Análisis Matemático I”, 3rd ed., Lima-Perú, 2002, pp. 340-364.

[5] Wolfram Research Inc., Wolfram Mathematica ® Tutorial Collection, “Mathematics and Algorithms”, 2008, pp. 208-210.

EJERCICIOS PROPUESTOS

GRUPO 2

En los ejercicios del 1 al 22, calcular los límites.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^{2n}+1-3x^{-2n}}{3x^{2n}-5+2x^{-2n}}$

R. 5.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)\left(\dfrac{\sqrt[n]{x-1}-1}{\sqrt[m]{x-1}-1}\right)$

R. $\dfrac{6m}{n}$.

3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{-9x}+1}-2}{2-\sqrt[3]{x+11}}$

R. 1.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3}+3\sqrt{x}-3x-1}{x+3\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x^2}-1}$

R. $\dfrac{27}{8}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[9]{x-1}+4\sqrt[11]{x-1}-\sqrt[13]{x-1}+4}{\sqrt[3]{x-1}-5\sqrt[5]{x-1}+\sqrt[7]{x-1}-3}$

R. $-\dfrac{3584}{4719}$.

6. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+2\sqrt[3]{x}-7}{x-8}\right)$

R. $\dfrac{13}{72}$.

7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a},\ a>0.$

R. $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{x^{p+1}-x^p-x+1};\ n,p\in\mathbb{Z}^+.$

R. $\dfrac{n(n+1)}{2p}$.

9. $\lim\limits_{x\to 20}\dfrac{\left(\sqrt{5x}-10\right)}{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{x}\right)}\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt[5]{8x/5}}-2}{x^2-400}\right)$

R. $-\dfrac{\sqrt{5}}{8000}$.

10. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+4)-f(4)}{h},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}.$

R. $-\dfrac{1}{50}$.

11. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$, si $g(x-1)=\sqrt{x^2-2x},\ x\in(\langle-\infty,\ 1]\cup[3,\ +\infty\rangle).$

R. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

12. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(fog)(x)}{\sqrt{7-x}-3}$, si $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-2}$ y $g(x)=\sqrt{2x+5}$.

R. -10.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})\cdots\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

R. $\dfrac{1}{n!}$.

14. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{\left[3-\sqrt{3\operatorname{sgn}(x^3+6)-2x}\right]\left(\sqrt[3]{28\sqrt{x^2+13}-196}\right)}{\left(\sqrt[3]{x+6}\right)\left(2-\sqrt[3]{4+\sqrt{|x-2|-4[\![x/4]\!]}}\right)}$

R. $-64\sqrt[3]{3}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[5]{x+1}-3\sqrt[6]{x+1}+2}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[3]{x+1}-2}\right)$

R. $-\dfrac{18}{35}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[p]{x+1}-\sqrt[q]{x+1}}{x}\right)$; $p,q\in\mathbb{Z}^+$

R. $\dfrac{q-p}{pq}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{3x^2-8}-x\sqrt[3]{x+6}+x^2-2}{x^3-2x^2+x-2}\right)$

R. $\dfrac{29}{30}$.

18. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt[3]{2x}-\sqrt{x}+2x-8}{x-4}\right)$

R. $\dfrac{23}{12}$.

19. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{5\sqrt[3]{3x-5}-3\sqrt{3x-5}+2x-6}{x^2-2x}\right)$

R. $\dfrac{5}{4}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+x}{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1-2x}}\right)$

R. 1.

21. $\lim\limits_{x\to 4}\left[\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x^2-3x+4}{x-3}}-\sqrt[4]{\dfrac{x^2+4x}{x^2-14}}}{\sqrt[4]{3x+4}-\sqrt[3]{x+4}}\right]$

R. 150.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{8+x^3}-\sqrt{4+x^2}}\right)$

R. -4.

23. Sean $P(3,4)$ y $Q\left(x,\sqrt{25-x^2}\right)$ puntos diferentes y sea $M(x)$ la pendiente de la recta que pasa por P y Q. Hallar el $\operatorname*{Lim}\limits_{x\to 3} M(x)$

R. $-\dfrac{3}{4}$.

24. Halle la posición límite del punto P cuando $c\to 1$, donde P es la intersección de las rectas: $\mathcal{L}_1$: $3x+5y=1$ y $\mathcal{L}_2$: $(2+c)x+5c^2y=1$.

R. $P\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{1}{25}\right)$.

En los ejercicios del 25 al 30, hallar: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

25. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 2$

R. $6x^2 - 6x + 1.$

26. $f(x) = \sqrt[5]{5x-1}$

R. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{(5x-1)^4}}.$

27. $f(x) = 3x^2 - 2x\sqrt{1-4x}$

R. $6x - 2\sqrt{1-4x} + \dfrac{4x}{\sqrt{1-4x}}$

28. $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{Z}^+$

R. $nx^{n-1}.$

29. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

R. $-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$

30. $f(x) = \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbb{Z}^+$

R. $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$

1.5. LÍMITES LATERALES

Estos tipos de límites se aplican a funciones que tienen más de una regla de correspondencia.

1.5.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN POR LA IZQUIERDA

Definición 1.2. Si f es una función definida al menos en un intervalo $\langle a, x_0\rangle \subset \mathrm{Dom}(f)$, en el cual x_0 es un punto de acumulación, entonces el límite de f cuando x se aproxima a x_0 por la izquierda es:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1$$

$$\Leftrightarrow [(\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0)/ \text{ si } x \in \langle a, x_0\rangle \subset \mathrm{Dom}(f) \text{ y si } 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon]. \quad \textbf{(1.22)}$$

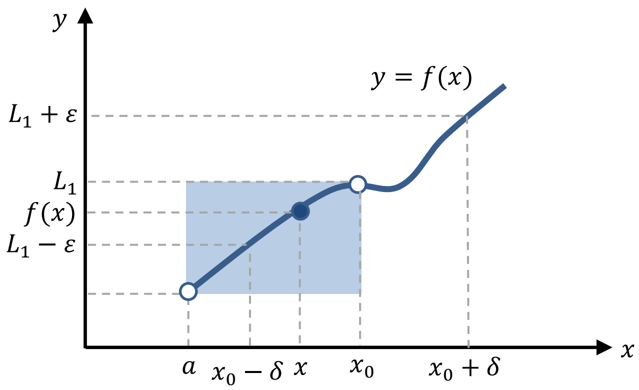


Figura 1.14. Representación gráfica del límite de una función por la izquierda [1–4].

1.5.2. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN POR LA DERECHA

Definición 1.3. Si f es una función definida al menos en un intervalo $\langle x_0, b\rangle \subset \mathrm{Dom}(f)$, en el cual x_0 es un punto de acumulación, entonces el límite de f cuando x se aproxima a x_0 por la derecha es:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$$

$$\Leftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0) / \text{ si } x \in \langle x_0, b \rangle \subset \text{Dom}(f) \text{ y si } 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon]. \quad \textbf{(1.23)}$$

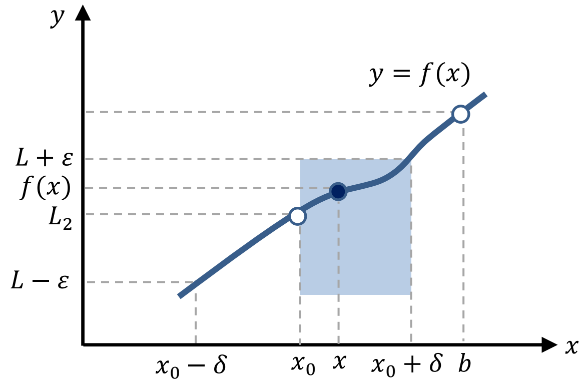


Figura 1.14. Representación gráfica del límite de una función por la derecha [1–4].

Teorema 1.3. Existe límite de una función en x_0, si y sólo si, existen los límites laterales y son iguales, es decir:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L. \quad \textbf{(1.24)}$$

En la figura 1.15, se muestra la representación gráfica de una función f en la que existe límite, cuando x se aproxima a x_0.

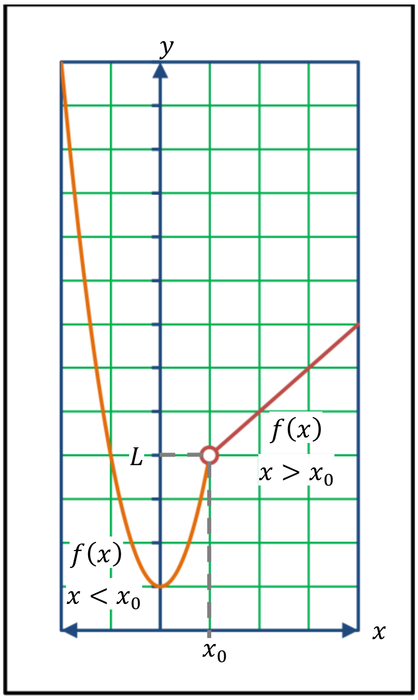


Figura 1.15. Representación gráfica de la función f en la que los límites laterales son iguales: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

El punto (x_0, L) puede ser abierto o cerrado.

No existe límite de la función f cuando x se aproxima a x_0 en los siguientes casos:

- Cuando no existe uno de los límites laterales
- Cuando los límites laterales existen y son diferentes

Ejemplo 1.21. Calcular si existe $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$, donde: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{1-\sqrt{x-4}}, & x < 5 \\ \dfrac{x^2-12x+35}{x-5}, & x > 5 \end{cases}$

Solución.

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} \frac{x-5}{1-\sqrt{x-4}} = \lim_{x \to 5^-} \frac{(x-5)\left(1+\sqrt{x-4}\right)}{(5-x)} = -\lim_{x \to 5^-} \frac{(x-5)\left(1+\sqrt{x-4}\right)}{(x-5)}$$

$$= -\lim_{x \to 5^-} \left(1+\sqrt{x-4}\right) = -\left(1+\sqrt{5-4}\right) = -(1+1) = -2.$$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} \frac{x^2-12x+35}{x-5} = \lim_{x \to 5^+} \frac{(x-5)(x-7)}{(x-5)} = \lim_{x \to 5^+} (x-7) = (5-7) = -2.$$

Como los limites laterales existen y son iguales, entonces el límite de $f(x)$ existe, es decir:

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^+} f(x) \ \therefore \exists \lim_{x \to 5} f(x).$$

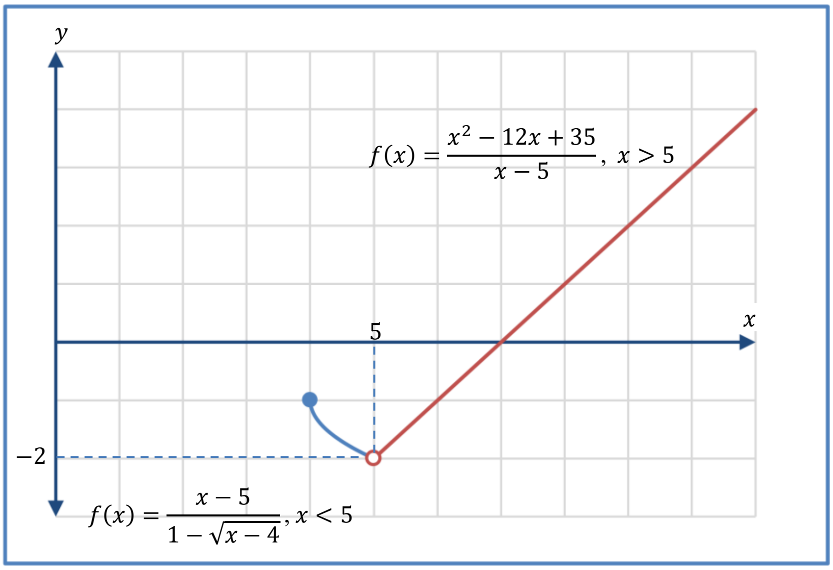


Figura 1.16. Representación gráfica de: $f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{1-\sqrt{x-4}}, & x < 5 \\ \frac{x^2-12x+35}{x-5}, & x > 5 \end{cases}$, en el ejemplo 1.21.

Para calcular los límites laterales de una función con el programa Wolfram Mathematica, la referencia [5] indica que las sintaxis son:

Para el límite por la izquierda

$$\text{Limit}\,[expr,\ x \to x_0,\ \text{Assumptions} \to x < x_0]. \tag{1.25}$$

Para el límite por la derecha

$$\text{Limit}\,[expr,\ x \to x_0,\ \text{Assumptions} \to x > x_0]. \tag{1.26}$$

Entonces, el cálculo de los límites laterales, haciendo uso del programa Wolfram Mathematica es:

```
In[1]:= Limit[(x - 5)/(1 - √(x - 4)), x → 5, Assumptions → x < 5]
        límite                                  asunciones

Out[1]= -2
```

```
In[2]:= Limit[(x^2 - 12 x + 35)/(x - 5), x → 5, Assumptions → x > 5]
        límite                                  asunciones

Out[2]= -2
```

Ejemplo 1.22. Calcular si existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, donde: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x[\![\sqrt{9-x}]\!]^2}{x+2}, & x < 1 \\[2ex] \dfrac{x+3}{2x+1}, & x \in \langle 1, 2\rangle \end{cases}$

Solución.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x[\![\sqrt{9-x}\,]\!]^2}{x+2}$$

$$x < 1 \ \Rightarrow\ -x > -1 \ \Rightarrow\ 9 - x > 8 \ \Rightarrow\ \sqrt{9-x}\ > 2\sqrt{2} > 2 \ \Rightarrow\ [\![\sqrt{9-x}\,]\!] = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x[\![\sqrt{9-x}\,]\!]^2}{x+2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(2)^2}{x+2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{4x}{x+2} = \frac{4(1)}{1+2} = \frac{4}{3}.$$

```
In[3]:= Limit[x (Floor[√(9 - x)])^2/(x + 2), x → 1, Assumptions → x < 1]
        límite                                    asunciones

Out[3]= 4/3
```

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{1+3}{2(1)+1} = \frac{4}{3}.$$

```
In[4]:= Limit[(x + 3)/(2 x + 1), x → 1, Assumptions → x > 1]
        límite                        asunciones

Out[4]= 4/3
```

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) \;\therefore \exists \lim_{x\to1} f(x).$$

Ejemplo 1.23. Calcular: $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{\sqrt{\frac{|x|^3}{3}-\frac{3[\![x]\!]}{2}}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{9\operatorname{sgn}(x-1)-x^2}}$.

Solución.

$$\operatorname{sgn}(x-1)=\begin{cases}-1, & x-1<0 \Rightarrow x<1\\ 0, & x-1=0\Rightarrow x=1\\ 1, & x-1>0\Rightarrow x>1\end{cases},\qquad |x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$$

$x<3 \Rightarrow 2<x<3 \Rightarrow [\![x]\!]=2$, como $x\to3^- \Rightarrow \operatorname{sgn}(x-1)=1$ y $|x|=x$.

$$\lim_{x\to3^-}\frac{\sqrt{\frac{|x|^3}{3}-\frac{3[\![x]\!]}{2}}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{9\operatorname{sgn}(x-1)-x^2}}=\lim_{x\to3^-}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{3}-\frac{3(2)}{2}}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{9(1)-x^2}}=\lim_{x\to3^-}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{3}}-3\right)+\sqrt{3-x}}{\sqrt{9(1)-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to3^-}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{3}}-3\right)}{\sqrt{9-x^2}}+\lim_{x\to3^-}\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Evaluando los límites por separado

$$\lim_{x\to3^-}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{3}}-3\right)}{\sqrt{9-x^2}}=\lim_{x\to3^-}\frac{\left(\frac{x^3}{3}-9\right)}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)\left(\sqrt{\frac{x^3}{3}}+3\right)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to3^-}\frac{(x^3-27)}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)\left(\sqrt{\frac{x^3}{3}}+3\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to3^-}\frac{(x^3-27)}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)\left(\sqrt{\frac{x^3}{3}}+3\right)}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to3^-}\frac{(3-x)(x^2+3x+9)}{\left(\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{\frac{x^3}{3}}+3\right)}$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to3^-}\frac{\left(\sqrt{3-x}\right)(x^2+3x+9)}{\left(\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{\frac{x^3}{3}}+3\right)}=-\frac{1}{3}\frac{(0)(9+9+9)}{\left(\sqrt{6}\right)(6)}=0.$$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9-x^2}}=\lim_{x\to3^-}\frac{\sqrt{3-x}}{\left(\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{3+x}\right)}=\lim_{x\to3^-}\frac{1}{\left(\sqrt{3+x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\therefore \lim_{x\to3^-}\frac{\sqrt{\frac{|x|^3}{3}-\frac{3[\![x]\!]}{2}}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{9\operatorname{sgn}(x-1)-x^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

In[5]:= $$\texttt{Limit}\left[\frac{\sqrt{\frac{(\texttt{Abs}[x])^3}{3}}-\frac{3\,\texttt{Floor}[x]}{2}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{9\,\texttt{Sign}[x-1]-x^2}},\ x\to3,\ \texttt{Assumptions}\to x<3\right]$$
límite asunciones

Out[5]= $\frac{1}{\sqrt{6}}$

Ejemplo 1.24. Calcular: $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{|x-2|\left[\!\left[\dfrac{x}{x-1}\right]\!\right]}{x\left[\!\left[\dfrac{x}{2}\right]\!\right]-1}\right]$.

Solución.

Por la propiedad del valor absoluto, se tiene: $|x-2|=\begin{cases}2-x, & x<2\\ x-2, & x\geq 2\end{cases}$

$x\to 2^-\Rightarrow |x-2|=2-x,\ x\to 2^+\Rightarrow |x-2|=x-2$

$$x<2\ \Rightarrow\ x-1<1\ \Rightarrow\ \frac{1}{x-1}>1\ \Rightarrow\ \frac{1}{x-1}+1>2\ \Rightarrow\ 2<\frac{x}{x-1}<3\ \Rightarrow\ \left[\!\left[\frac{x}{x-1}\right]\!\right]=2$$

$$x>2\ \Rightarrow\ x-1>1\ \Rightarrow\ \frac{1}{x-1}<1\Rightarrow\ \frac{1}{x-1}+1<2\ \Rightarrow\ 1<\frac{x}{x-1}<2\ \Rightarrow\ \left[\!\left[\frac{x}{x-1}\right]\!\right]=1$$

$$x<2\ \Rightarrow\ \frac{x}{2}<1\ \Rightarrow\ 0<\frac{x}{2}<1\ \Rightarrow\ \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]=0$$

$$x>2\ \Rightarrow\ \frac{x}{2}>1\ \Rightarrow\ 1<\frac{x}{2}<2\ \Rightarrow\ \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]=1$$

$$\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{|x-2|\left[\!\left[\frac{x}{x-1}\right]\!\right]}{x\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]-1}\right]=-\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{(x-2)(2)}{x(0)-1}\right]=0$$

$$\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{|x-2|\left[\!\left[\frac{x}{x-1}\right]\!\right]}{x\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]-1}\right]=\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{(x-2)(1)}{x(1)-1}\right]=0$$

$$\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{|x-2|\left[\!\left[\frac{x}{x-1}\right]\!\right]}{x\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]-1}\right]=\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{|x-2|\left[\!\left[\frac{x}{x-1}\right]\!\right]}{x\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]-1}\right].$$

Como los límites laterales son iguales, se concluye que:

$$\exists\lim_{x\to 2}\left[\frac{|x-2|\left[\!\left[\frac{x}{x-1}\right]\!\right]}{x\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]-1}\right].$$

```
In[6]:= Limit[ (Abs[x - 2] Floor[x/(x-1)]) / (x Floor[x/2] - 1) , x → 2]
        límite

Out[6]= 0
```

Ejemplo 1.25. Calcular: $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x-3+\sqrt[3]{4x^2-3x-9}}{\sqrt[3]{x^2+2\left[\!\left[\dfrac{x+6}{3}\right]\!\right]}+\sqrt{2x^2+\operatorname{sgn}(x^2-1)}-\dfrac{5}{2}x}\right]$.

Solución.

Evaluando el límite por la izquierda

$$x \to 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x + 6 < 8 \Rightarrow \frac{x+6}{3} < \frac{8}{3} < 3 \Rightarrow 2 < \frac{x+6}{3} < 3 \Rightarrow \left[\!\left[\frac{x+6}{3}\right]\!\right] = 2.$$

$$\operatorname{sgn}(x^2-1) = \begin{cases} -1, & x^2-1<0 \Rightarrow x \in \langle -1, 1\rangle \\ 0, & x^2-1=0 \Rightarrow x \in \{-1, 1\} \\ 1, & x^2-1>0 \Rightarrow x \in (\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle) \end{cases}$$

$$x \to 2^- \Rightarrow \operatorname{sgn}(x^2-1) = 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left[\frac{x-3+\sqrt[3]{4x^2-3x-9}}{\sqrt[3]{x^2+2\left[\!\left[\frac{x+6}{3}\right]\!\right]}+\sqrt{2x^2+\operatorname{sgn}(x^2-1)}-\frac{5}{2}x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\left[\frac{x-3+\sqrt[3]{4x^2-3x-9}}{\sqrt[3]{x^2+4}+\sqrt{2x^2+1}-\frac{5}{2}x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\left[\frac{(x-2)+\left(\sqrt[3]{4x^2-3x-9}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2\right)+\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)-\frac{5}{2}(x-2)}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{(x-2)}{\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2\right)+\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)-\frac{5}{2}(x-2)}\right]}_{L_1}$$

$$+\underbrace{\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{4x^2-3x-9}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2\right)+\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)-\frac{5}{2}(x-2)}\right]}_{L_2}.$$

Calculando los límites por separado

$$L_1 = \lim_{x\to 2^-}\left[\frac{(x-2)}{\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2\right)+\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)-\frac{5}{2}(x-2)}\right]$$

$$= \left[\lim_{x\to 2^-}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2\right)+\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)-\frac{5}{2}(x-2)}{(x-2)}\right]^{-1}$$

$$= \left[\lim_{x\to 2^-}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2\right)}{(x-2)}+\lim_{x\to 2^-}\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)}{(x-2)}-\frac{5}{2}\right]^{-1}$$

$$= \left[\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\mathrm{CG1})}+2\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\mathrm{CG2})}-\frac{5}{2}\right]^{-1}$$

$$= \left[\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+2)}{(12)}+2\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+2)}{(6)}-\frac{5}{2}\right]^{-1} = \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-\frac{5}{2}\right)^{-1} = \left(-\frac{5}{6}\right)^{-1} = -\frac{6}{5}.$$

$$\mathrm{CG1} = \left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2 + 2\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right) + 4.$$

Si $x \to 2^- \Rightarrow \mathrm{CG1} = 4+4+4 = 12.$

$\text{CG2} = \left(\sqrt{2x^2+1}+3\right).$

Si $x \to 2^- \;\Rightarrow\; \text{CG2} = 3+3 = 6.$

$$L_2 = \lim_{x\to 2^-}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{4x^2-3x-9}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2\right)+\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)-\frac{5}{2}(x-2)}\right]$$

$$= \left[\lim_{x\to 2^-}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2\right)+\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)-\frac{5}{2}(x-2)}{\left(\sqrt[3]{4x^2-3x-9}-1\right)}\right]^{-1}$$

$$= \left[\lim_{x\to 2^-}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2\right)}{\left(\sqrt[3]{4x^2-3x-9}-1\right)}+\lim_{x\to 2^-}\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)}{\left(\sqrt[3]{4x^2-3x-9}-1\right)}-\frac{5}{2}\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)}{\left(\sqrt[3]{4x^2-3x-9}-1\right)}\right]^{-1}$$

$$= \left[\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)(\text{CG3})}{(x-2)(4x+5)(\text{CG1})}+2\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)(\text{CG3})}{(x-2)(4x+5)(\text{CG2})}-\frac{5}{2}\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(\text{CG3})}{(x-2)(4x+5)}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{3}{12}\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+2)}{(4x+5)}+\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+2)}{(4x+5)}-\frac{15}{2}\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(4x+5)}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{4}\frac{(4)}{(13)}+\frac{(4)}{(13)}-\frac{15}{2}\frac{(1)}{(13)}\right]^{-1}$$

$$= \left(-\frac{5}{26}\right)^{-1} = -\frac{26}{5}.$$

$\text{CG3} = \left(\sqrt[3]{4x^2-3x-9}\right)^2+\left(\sqrt[3]{4x^2-3x-9}\right)+1.$

Si $x \to 2^- \Rightarrow \text{CG3} = 1+1+1 = 3.$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left[\frac{x-3+\sqrt[3]{4x^2-3x-9}}{\sqrt[3]{x^2+2\left[\!\left[\frac{x+6}{3}\right]\!\right]}+\sqrt{2x^2+\operatorname{sgn}(x^2-1)}-\frac{5}{2}x}\right] = -\frac{6}{5}-\frac{26}{5} = -\frac{32}{5}.$$

Haciendo uso del programa Wolfram Mathematica:

In[7]:= $\text{Limit}\left[\dfrac{x-3+\sqrt[3]{4x^2-3x-9}}{\sqrt[3]{x^2+2\,\text{Floor}\left[\frac{x+6}{3}\right]}+\sqrt{2x^2+\text{Sign}\left[x^2-1\right]}-\frac{5}{2}x},\ x\to 2,\ \text{Assumptions}\to x<2\right]$
límite asunciones

Out[7]= $-\dfrac{32}{5}$

Evaluando el límite por la derecha

$$x \to 2^+ \;\Rightarrow\; x > 2 \;\Rightarrow\; x+6 > 8 \;\Rightarrow\; \frac{x+6}{3} > \frac{8}{3} < 3 \;\Rightarrow\; \left[\!\left[\frac{x+6}{3}\right]\!\right] = 2.$$

$$\operatorname{sgn}(x^2-1) = \begin{cases} -1, & x^2-1<0 \Rightarrow\ x \in \langle -1, 1\rangle \\ 0, & x^2-1=0 \Rightarrow\ x \in \{-1, 1\} \\ 1, & x^2-1>0 \Rightarrow\ x \in (\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle) \end{cases}$$

$x \to 2^+ \Rightarrow \operatorname{sgn}(x^2-1) = 1.$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left[\frac{x-3+\sqrt[3]{4x^2-3x-9}}{\sqrt[3]{x^2+2\left[\!\left[\frac{x+6}{3}\right]\!\right]}+\sqrt{2x^2+\operatorname{sgn}(x^2-1)}-\frac{5}{2}x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\left[\frac{x-3+\sqrt[3]{4x^2-3x-9}}{\sqrt[3]{x^2+4}+\sqrt{2x^2+1}-\frac{5}{2}x}\right] = -\frac{32}{5}.$$

Calculando el límite por la derecha mediante programa Wolfram Mathematica:

```
In[8]:= Limit[(x - 3 + ∛(4 x^2 - 3 x - 9)) / (∛(x^2 + 2 Floor[(x+6)/3]) + √(2 x^2 + Sign[x^2 - 1]) - 5/2 x), x → 2, Assumptions → x > 2]
        límite                                                                                              asunciones

Out[8]= -32/5
```

Se puede concluir que los dos límites laterales son iguales, es decir:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = -32/5.$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\left[\frac{x-3+\sqrt[3]{4x^2-3x-9}}{\sqrt[3]{x^2+2\left[\!\left[\frac{x+6}{3}\right]\!\right]}+\sqrt{2x^2+\operatorname{sgn}(x^2-1)}-\frac{5}{2}x}\right] = -\frac{32}{5}.$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Figueroa, “Análisis matemático 1”, 4th ed., Lima-Perú: Ediciones R.F.G., 2011, pp. 202-216.

[2] M. Mitacc y L. Toro, “Tópicos de cálculo”, 3rd ed., vol. 1, Lima-Perú: Editorial Thales S.R.L., junio del 2009, pp. 134-140.

[3] E. Espinoza, “Análisis Matemático I”, 3rd ed., Lima-Perú, 2002, pp. 365-375.

[4] A. Venero, “Análisis Matemático 1”, 2nd ed., Lima-Perú: Ediciones Gemar, 2016, pp. 267-277.

[5] Wolfram Research Inc., Wolfram Mathematica ® Tutorial Collection, “Mathematics and Algorithms”, 2008, pp. 208-210, 238.

EJERCICIOS PROPUESTOS

GRUPO 3

En los ejercicios del 1 al 10, calcular los límites.

1. $\lim_{x\to \frac{5}{2}} \sqrt{|x| + [\![3x]\!] + 4}$

R. $\frac{\sqrt{54}}{2}$.

2. $\lim_{x\to \sqrt{2}^-} [x^2 - \operatorname{sgn}(|x^2-1|-1)]$

R. 3.

3. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}[x^2-\operatorname{sgn}(|x^2-1|-1)]$

R. 1.

4. $\lim\limits_{x\to 1/6}\dfrac{12-\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]}{[\![3x]\!]-10}$

R. $-\dfrac{6}{5}$.

5. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{6\sqrt[3]{x-6\operatorname{sgn}(x^2-4)}-4\sqrt{x+[\![4+2x]\!]}}{\sqrt{x^2+5}-3}$

R. $-\dfrac{1}{4}$.

6. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-}\left[\dfrac{2[\![x^2+1]\!]+|x+2|-2}{[\![3x+2]\!]}\right]$

R. $\dfrac{4+\sqrt{2}}{6}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\!\left[\dfrac{5}{x^2+2}\right]\!\right]$

R. 0.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\!\left[\dfrac{2x+3}{x+4}\right]\!\right]$

R. 1.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\!\left[\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right]\!\right]$

R. 0.

10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2\operatorname{sgn}[\![|x^2-2|+3]\!]x^2-18}{x^3-27}$

R. $\dfrac{4}{9}$.

11. Sea: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{[\![x-1]\!]-x}{\sqrt{x-[\![x]\!]}}, & x\in[-9,-2\rangle\\ \dfrac{[\![3x]\!]-3[\![x]\!]-8\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]}{x-|x|}, & x\in[-2,7\rangle\end{cases}$. Hallar si existe $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$

R. -2.

12. Sea: $f(x)=\begin{cases}4\operatorname{sgn}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right), & x\in(\langle-\infty,-2\rangle-\{-3\})\\ \dfrac{\left(2-\left[\!\left[\frac{2x+5}{x+3}\right]\!\right]\right)x^2-4}{x+2}, & x\in\langle-2,+\infty\rangle\end{cases}$. Hallar si existe $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$

R. -4.

13. Sea: $f(x)=\begin{cases}[\![x]\!]+\sqrt{x-[\![x]\!]}, & x<1\\ \left(\dfrac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x-|x|}{2}\right)^2, & x\geq 1\end{cases}$. Hallar si existe $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

R. 1.

14. Sea: $f(x)=\begin{cases}\left[\!\left[\dfrac{9x+11}{4}\right]\!\right], & 1\leq x<2\\ \dfrac{3\sqrt[3]{3x+2}+2\sqrt{5x-6}-10}{x-2}, & x>2\end{cases}$. Hallar si existe $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

R. $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=7,\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\dfrac{13}{4},\quad \therefore \nexists \lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

1.6. LÍMITES AL INFINITO

En la presente sección veremos límites de las formas: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$. El símbolo ∞ representa al infinito y en este caso indica que si x crece o decrece indefinidamente, el valor de $f(x)$ se aproxima a L (figuras 1.17 y 1.18) [1–5].

Definición 1.4. Si la función f está definida en el intervalo $\langle x_0, +\infty\rangle$, el límite de $f(x)$ cuando x crece a $+\infty$ es L. Formalmente se escribe (véase la figura 1.17):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow [(\forall\varepsilon > 0, \exists\, N > 0)/ \text{ si } x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]. \qquad \textbf{(1.27)}$$

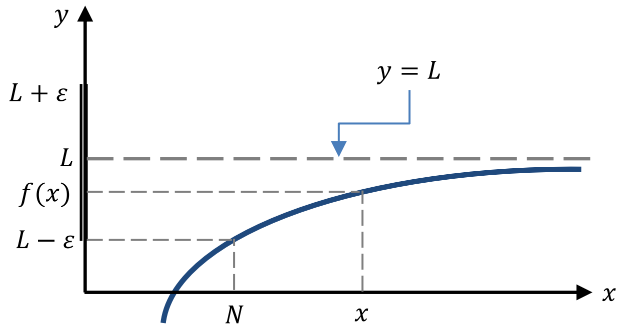


Figura 1.17. Representación gráfica de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ [1–2].

Definición 1.5. Si la función f está definida en el intervalo $\langle -\infty, x_0\rangle$, el límite de $f(x)$ cuando x decrece a $-\infty$ es L. Formalmente se escribe (véase la figura 1.18):

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow [(\forall\varepsilon > 0, \exists(-N) > 0)/ \text{ si } x < (-N) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]. \qquad \textbf{(1.28)}$$

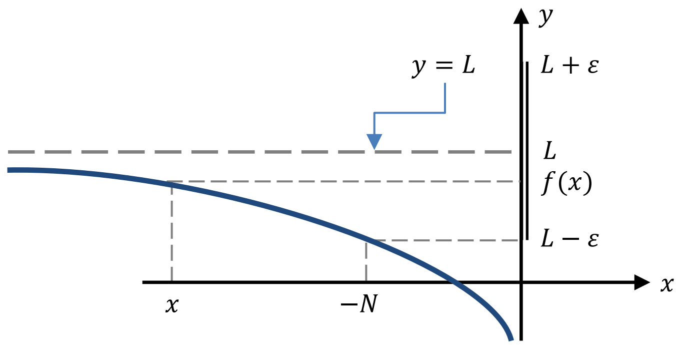


Figura 1.18. Representación gráfica de $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ [1–2].

Figueroa [2], menciona que los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ no son números; sin embargo, constituyen un nuevo sistema numérico llamado "**el sistema ampliado de número reales**", en el cual se cumplen las siguientes propiedades:

1. $c + (+\infty) = +\infty$

2. $c + (-\infty) = -\infty$

3. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

4. Si $c > 0 \Rightarrow c(+\infty) = +\infty$

5. Si $c < 0 \Rightarrow c(+\infty) = -\infty$

6. Si $c > 0 \Rightarrow c(-\infty) = -\infty$

7. Si $c < 0 \Rightarrow c(-\infty) = +\infty$

8. $(+\infty)(+\infty) = +\infty$

9. $(-\infty)(-\infty) = +\infty$

10. $(-\infty)(+\infty) = -\infty$

Donde, el símbolo c representa a una constante real.

Teorema 1.4. Si n es cualquier entero positivo, entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0. \tag{1.29}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0. \tag{1.30}$$

$$(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty, & n \text{ es par positivo} \\ -\infty, & n \text{ es impar positivo} \end{cases}. \tag{1.31}$$

El método para evaluar límites al infinito consiste en factorizar la mayor potencia de x en el numerador y denominador, para posteriormente aplicar las ecuaciones **(1.29)**, **(1.30)** y **(1.31)**.

Ejemplo 1.26. Calcular $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de grado n y m, respectivamente, $n > 0, m > 0$.

Solución.

Se considera que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, tienen la siguiente forma:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n \ \text{ y } \ Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots\cdots + b_m.$$

Donde $(a_0 \text{ y } b_0) \in (\mathbb{R} - \{0\})$, entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots\cdots + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots\cdots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots\cdots + \frac{b_m}{x^m}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{a_0}{b_0}\right) x^{n-m}.$$

$$= \begin{cases} 0, \ n < m \\ \dfrac{a_0}{b_0}, \ n = m \\ \begin{cases} \left(\frac{a_0}{b_0}\right) \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \left(\frac{a_0}{b_0}\right)(+\infty) = +\infty, & \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ \left(\frac{a_0}{b_0}\right)(+\infty) = -\infty, & \frac{a_0}{b_0} < 0 \end{cases}, \ n > m \\ \left(\frac{a_0}{b_0}\right) \lim\limits_{x\to-\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \left(\frac{a_0}{b_0}\right)(-\infty) = -\infty, & \frac{a_0}{b_0} > 0 \ \wedge \ (n-m) \text{ es impar} \\ \left(\frac{a_0}{b_0}\right)(+\infty) = +\infty, & \frac{a_0}{b_0} > 0 \ \wedge \ (n-m) \text{ es par} \\ \left(\frac{a_0}{b_0}\right)(-\infty) = +\infty, & \frac{a_0}{b_0} < 0 \ \wedge \ (n-m) \text{ es impar} \\ \left(\frac{a_0}{b_0}\right)(+\infty) = -\infty, & \frac{a_0}{b_0} < 0 \ \wedge \ (n-m) \text{ es par} \end{cases}, \ n > m \end{cases} \end{cases}$$

Téngase en cuenta, que se aplicó las ecuaciones **(1.29)**, **(1.30)** y **(1.31)**, para resolver los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots\cdots + \frac{a_n}{x^n}\right) = a_0 + 0 + \cdots\cdots + 0 = a_0.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots\cdots + \frac{b_m}{x^m}\right) = b_0 + 0 + \cdots\cdots + 0 = b_0.$$

Ejemplo 1.27. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^5+4x^3-x+3}{6x^8+3x^5-3x+5}$.

Solución.

Factorizando la mayor potencia de x en el numerador y denominador:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5+4x^3-x+3}{6x^8+3x^5-3x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(2+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^5}\right)}{x^8\left(6+\frac{3}{x^3}-\frac{3}{x^7}+\frac{5}{x^8}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)(0) = 0.$$

Calculando el límite, haciendo uso de la sintaxis que muestra Wolfram Research [6]:

```
In[1]:= Limit[(2 x^5 + 4 x^3 - x + 3)/(6 x^8 + 3 x^5 - 3 x + 5), x → +∞]
        límite
Out[1]= 0
```

Ejemplo 1.28. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^5+5x^3+2x+3}{5x^3+3x^2+3x+5}$.

Solución.

Procediendo de la misma forma que en el ejemplo anterior:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5+5x^3+2x+3}{5x^3+3x^2+3x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(4+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}\right)}{x^3\left(5+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)} = \left(\frac{4}{5}\right)\lim_{x\to+\infty} x^2 = \left(\frac{4}{5}\right)(+\infty)^2 = +\infty.$$

```
In[2]:= Limit[(4 x^5 + 5 x^3 + 2 x + 3)/(5 x^3 + 3 x^2 + 3 x + 5), x → +∞]
        límite
Out[2]= ∞
```

Ejemplo 1.29. Calcular: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^9-3x^3+4x^2+2}{7x^5+3x^3-x+3}$.

Solución.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^9-3x^3+4x^2+2}{7x^5+3x^3-x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^9\left(5-\frac{3}{x^6}+\frac{4}{x^7}+\frac{2}{x^9}\right)}{x^5\left(7+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^5}\right)} = \left(\frac{5}{7}\right)\lim_{x\to-\infty} x^4 = \left(\frac{5}{7}\right)(-\infty)^4 = +\infty.$$

```
In[3]:= Limit[(5 x^9 - 3 x^3 + 4 x^2 + 2)/(7 x^5 + 3 x^3 - x + 3), x → -∞]
        límite
Out[3]= ∞
```

Ejemplo 1.30. Calcular: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^9-3x^3+4x^2+2}{7x^6+2x^5-x^2+3}$.

Solución.

Extrayendo en el numerador x^9 y en el denominador x^6:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^9-3x^3+4x^2+2}{7x^6+2x^5-x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^9\left(5-\frac{3}{x^6}+\frac{4}{x^7}+\frac{2}{x^9}\right)}{x^6\left(7+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^6}\right)}=\left(\frac{5}{7}\right)\lim_{x\to-\infty}x^3=\left(\frac{5}{7}\right)(-\infty)^3=-\infty.$$

```
In[4]:= Limit[(5 x^9 - 3 x^3 + 4 x^2 + 2)/(7 x^6 + 2 x^5 - x^2 + 3), x → -∞]
        límite

Out[4]= -∞
```

Ejemplo 1.31. Calcular: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^9-2x^3+5x^2+1}{-6x^7+2x^5-3x^2+3}$.

Solución.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^9-2x^3+5x^2+1}{-6x^7+2x^5-3x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^9\left(4-\frac{2}{x^6}+\frac{5}{x^7}+\frac{1}{x^9}\right)}{x^7\left(-6+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^5}+\frac{3}{x^7}\right)}=\left(-\frac{2}{3}\right)\lim_{x\to-\infty}x^2=\left(-\frac{2}{3}\right)(-\infty)^2$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\right)(+\infty)=-\infty.$$

```
In[5]:= Limit[(4 x^9 - 2 x^3 + 5 x^2 + 1)/(-6 x^7 + 2 x^5 - 3 x^2 + 3), x → -∞]
        límite

Out[5]= -∞
```

Ejemplo 1.32. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

Solución.

Aplicando la propiedad de diferencia de cuadrados y luego extrayendo el factor $\sqrt{x}$ tanto en el numerador como denominador:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x})\left(\sqrt{1+(1/\sqrt{x})}\right)}{(\sqrt{x})\left(\sqrt{1+\sqrt{(1/x)+(1/\sqrt{x^3})}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{1+(1/\sqrt{x})}\right)}{\left(\sqrt{1+\sqrt{(1/x)+(1/\sqrt{x^3})}}+1\right)}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+0})}{\left(\sqrt{1+\sqrt{0+0}}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Note que:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}=(\sqrt{x})\left(\sqrt{1+(1/\sqrt{x})}\right)\ \text{y}\ \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}=(\sqrt{x})\left(\sqrt{1+\sqrt{(1/x)+(1/\sqrt{x^3})}}+1\right)$$

In[6]:= $\text{Limit}\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\,,\ x\to+\infty\right]$
límite

Out[6]= $\dfrac{1}{2}$

Ejemplo 1.33. Evaluar: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^3+3x^2-x+2}{2x^2+x-3}-\sqrt{4x^2+3x+2}\right)$.

Solución.

Para hacer que el numerador sea del mismo grado que el denominador, se resta y suma a la vez $2x$.

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^3+3x^2-x+2}{2x^2+x-3}-\sqrt{4x^2+3x+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^3+3x^2-x+2}{2x^2+x-3}-2x\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+3x+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5x+2}{2x^2+x-3}\right)+\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x-2}{\left(2x+\sqrt{4x^2+3x+2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}\left[\frac{1+\left(\frac{5}{x}\right)+\left(\frac{2}{x^2}\right)}{2+\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{3}{x^2}\right)}\right]-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}\left[\frac{3+\left(\frac{2}{x}\right)}{2+\sqrt{4+\left(\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{2}{x^2}\right)}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+\left(\frac{5}{x}\right)+\left(\frac{2}{x^2}\right)}{2+\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{3}{x^2}\right)}\right]-\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3+\left(\frac{2}{x}\right)}{2+\sqrt{4+\left(\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{2}{x^2}\right)}}\right]$$

$$=\left(\frac{1+0+0}{2+0-0}\right)-\left(\frac{3+0}{2+\sqrt{4+0+0}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}.$$

In[7]:= $\text{Limit}\left[\dfrac{4x^3+3x^2-x+2}{2x^2+x-2}-\sqrt{4x^2+3x+2}\,,\ x\to+\infty\right]$
límite

Out[7]= $-\dfrac{1}{4}$

Ejemplo 1.34. Evaluar: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+[\![1/x]\!]x}+x\right)$.

Solución.

Determinando el valor del máximo entero:

$$x>-\infty\ \Rightarrow\ \frac{1}{x}<0\ \Rightarrow\ -1<\frac{1}{x}<0\ \Rightarrow\ [\![1/x]\!]=-1.$$

$$L=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+[\![1/x]\!]\,x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-\ x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}.$$

$$\sqrt{x^2+2x} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} = |x|\sqrt{1+(2/x)}\,.\ \text{Recuerde que: } \sqrt{x^2} = |x| \text{ y } |x| = \begin{cases} -x, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Si } x\to-\infty \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow |x|\sqrt{1+(2/x)} = -x\sqrt{1+(2/x)}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\left[-x\sqrt{1+(2/x)}-x\right]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x\left[\sqrt{1+(2/x)}+1\right]}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\left[\sqrt{1+(2/x)}+1\right]} = -\frac{2}{\left[\sqrt{1+(0)}+1\right]} = -\frac{2}{2} = -1.$$

```
In[8]:= Limit[√(x² + 3 x + Floor[1 / x] x) + x, x → -∞]
        límite

Out[8]= -1
```

Ejemplo 1.35. Sea la función definida por: $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$. Calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ y grafique la función.

Solución.

El dominio de la función es: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}-\{1\} = \langle-\infty, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

$$\text{Si } x\in\langle-\infty,1\rangle \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2.$$

$$\text{Si } x\in\langle 1,+\infty\rangle \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2.$$

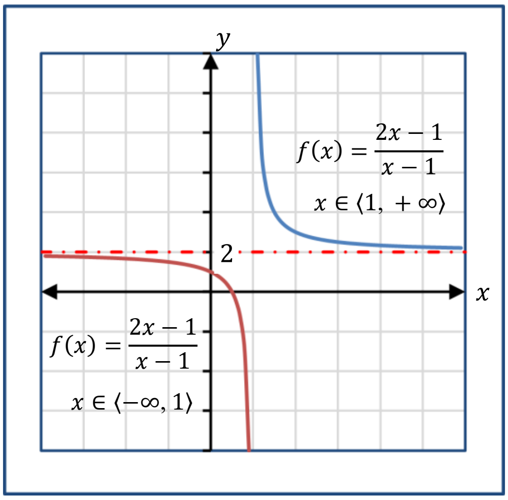


Figura 1.19. Representación gráfica de la función: $f(x) = (2x-1)/(x-1)$, en el ejemplo 1.35.

La figura 1.19, indica que si x crece o decrece indefinidamente, el valor de $f(x)$ se aproxima a 2.

Ejemplo 1.36. La temperatura de un cuerpo en °F a las t horas está dada por: $T(t) = \dfrac{20t}{t+1} + 30e^{-2t+2}$. Grafique la función y calcule e interprete $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)$.

Solución.

Graficando la función T, se tiene:

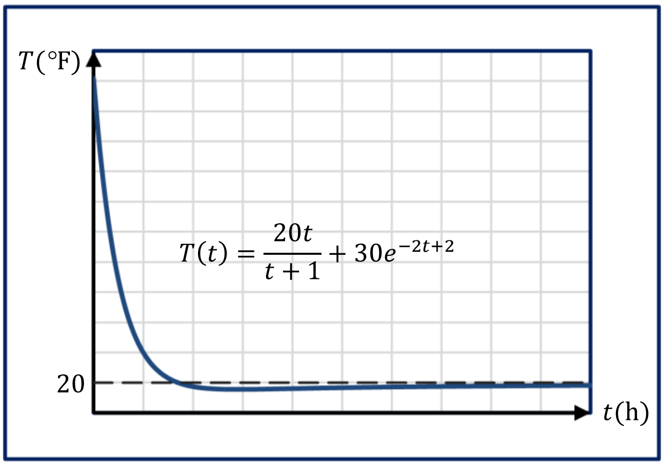


Figura 1.20. Representación gráfica de la función: $T(t) = [20t/(t+1)] + 30e^{-2t+2}$, en el ejemplo 1.36.

Calculando $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)$:

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{20t}{t+1} + 30e^{-2t+2}\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{20t}{t+1} + \lim_{t\to+\infty} 30e^{-2t+2}$$

$$= 20\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t\left(1+\frac{1}{t}\right)} + 30\lim_{t\to+\infty} e^{-2t+2} = 20\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{t}} + 30\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{2t-2}}$$

$$= 20\left(\frac{1}{1+0}\right) + 30\left(\frac{1}{e^{+\infty}}\right) = 20 + 30(0) = 20.$$

Recuerde que: $e^{+\infty} = +\infty$.

El límite $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t) = 20$, se puede interpretar de las formas siguientes:

- Si t crece indefinidamente el valor de T se aproxima a 20 °F.
- El valor de T a largo plazo se aproxima a 20 °F.

BIBLIOGRAFÍA

[1] M. Mitacc y L. Toro, "Tópicos de cálculo", 3rd ed., vol. 1, Lima-Perú: Editorial Thales S.R.L., junio del 2009, pp. 141-142, 149-154.

[2] R. Figueroa, "Análisis matemático 1", 4th ed., Lima-Perú: Ediciones R.F.G., 2011, pp. 236-251.

[3] M. Mitacc, F. Hoyos, F. Villanueva y G. Gómez, “Cálculo 1”, 2nd ed., Lima-Perú: Universidad de Lima, octubre del 2015, pp. 97-119.

[4] Stewart J., “Cálculo”, 3rd ed., México: Cengage Learning, 2000, pp. 128-135.

[5] R. Larson, R. P. Hostetler y B. H. Edwards, “Cálculo”, 8th ed., Impreso en China: McGraw-Hill Interamericana, 2006, pp. 83-84.

[6] Wolfram Research Inc., Wolfram Mathematica ® Tutorial Collection, “Mathematics and Algorithms”, 2008, pp. 208-210.

EJERCICIOS PROPUESTOS

GRUPO 4

En los ejercicios del 1 al 16, calcular los límites.

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3-x^2+x-1}{x^4-x^3-2x+1}$

R. 0.

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{8x-4}{\left(3-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}}$.

R. -2.

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{n^3}$

R. $1/3$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x(x+a)}-x}{x-\sqrt[3]{x^3+x^2+5[\![1/x]\!]}}\right)$

R. $-3a/2$.

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x+\sqrt[3]{8x^2+\sqrt[3]{8x+\sqrt[3]{8x}}}}-2\sqrt[3]{x}\right)$

R. $1/6$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+4}+x\right)$

R. 1.

7. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+\sqrt[3]{27x^4+\sqrt[3]{x^2}}}-\sqrt[3]{x^2}\right)$

R. 1.

8. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}+\sqrt[5]{x^4-x^5+1}\right)$

R. $-2/15$.

9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3+5x^2-4}{x^2+x-1}-\sqrt{9x^2+2x+3}\right)$

R. $5/3$.

10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+6x^2-16}-x}{\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-x}}$

R. $4/3$.

11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$

R. $-1/4$.

12. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x+\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x+3}}$

R. 2.

13. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$

R. $2/3$.

14. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{5x^2-x^3}+x\right)$

R. $5/3$.

15. Hallar el valor de las constantes a y b tales que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^4-3x^3+6x-2}{x^3+bx^2-5x+1}-2x+2\right)=-5$$

R. $a=2$ y $b=2$.

16. Hallar el valor de la constante c, si:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+cx^3}{x^3+1}-\sqrt[3]{x^2-10}\right)=\frac{5}{2}$$

R. $c=2$.

17. Hallar el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt[3]{8+\left[\!\left[\frac{1}{x^3}\right]\!\right]}+\sqrt[5]{32+\left[\!\left[\frac{1}{x^5}\right]\!\right]}\right)-\sqrt[3]{64x^3+24x^2+3}\right]$

R. $-1/2$.

18. Sea la función definida por: $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{2x^2+3}$. Determine $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$ y grafique la función.

R. $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\dfrac{3}{2}$.

19. El gerente de una compañía estima que la utilidad anual (en millones de soles) dentro de t años a partir del inicio de sus operaciones está dada por: $U(t)=\sqrt{t^2+11t+109}-\sqrt{t^2+t+69}$. Estime la utilidad de la compañía a largo plazo y grafique la función.

R. S/. 5 millones

20. La función costo C (en dólares) de la empresa Sagita S.A. al producir x unidades de un producto está dada por:

$$C(x)=500+\frac{10000x^2}{\sqrt{x^4+100}},\ x\geq 0.$$

Grafique la función y determine el costo aproximado de la empresa, cuando la producción aumenta indefinidamente.

R. $\$.10500$

21. El ingeniero de planta de una fábrica textil estima que el valor de venta de cierta maquinaria industrial, después de t años es:

$$V(t)=4800e^{-t/5}+400\ \ (\$).$$

¿Qué le sucede al valor de la maquinaria cuando t crece sin límite?

R. El valor de la maquinaria se aproxima a $\$.400$.

22. En un laboratorio de investigación biológica, se determinó que el tamaño T de los ejemplares de una cierta bacteria (medido en micras) varia con respecto al tiempo t (en horas), según la siguiente ecuación:

$$T(t)=\begin{cases}\sqrt{8-t}, & 0\leq t\leq 8\\ \dfrac{-4+\sqrt{2t^2-112}}{t-8}, & t>8\end{cases}$$

Grafique la función y calcule el tamaño aproximado de una de ellas, si las bacterias crecen en forma indefinida.

R. $\lim_{t\to+\infty}T(t)=\sqrt{2}$ micras.

1.7. LÍMITES INFINITOS

Definición 1.6. Considere una función f con vecindad reducida $V_\delta^*(x_0)$, en la cual x se aproxima tanto por la izquierda como por la derecha a x_0, los valores de $f(x)$ crecen o decrecen sin límite (véase las figuras 1.21 y 1.22) [1–3], es decir:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \end{cases}. \quad \textbf{(1.32)}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \end{cases}. \quad \textbf{(1.33)}$$

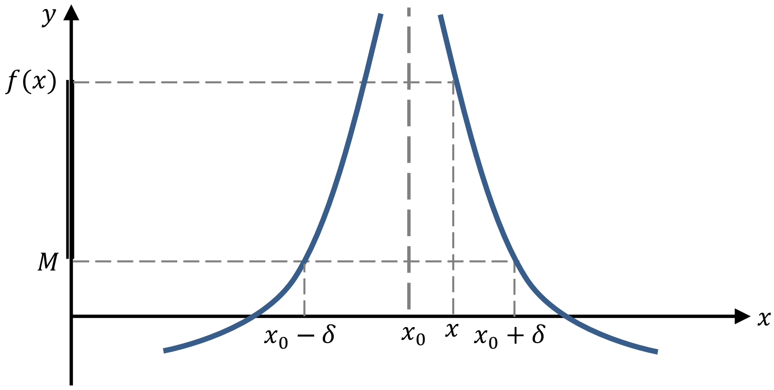


Figura 1.21. Representación gráfica de los límites: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ [1–2].

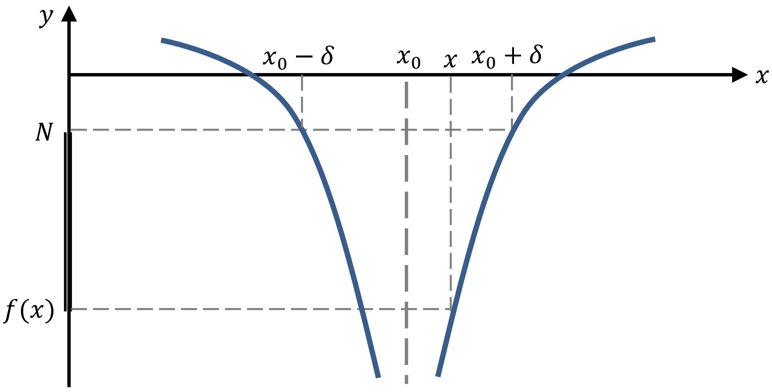


Figura 1.22. Representación gráfica de los límites: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ [1–2].

Teorema 1.5. Si n es cualquier entero positivo, entonces:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty. \quad \textbf{(1.34)}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty, & n \text{ es impar} \\ +\infty, & n \text{ es par} \end{cases}. \quad \textbf{(1.35)}$$

Teorema 1.6. Si c es cualquier número real diferente de cero, entonces:

$$\frac{c}{0^{+}} = \begin{cases} +\infty, & c > 0 \\ -\infty, & c < 0 \end{cases}. \tag{1.36}$$

$$\frac{c}{0^{-}} = \begin{cases} +\infty, & c < 0 \\ -\infty, & c > 0 \end{cases}. \tag{1.37}$$

Ejemplo 1.37. Evaluar: $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 \left[\!\left[\dfrac{2x+1}{x-1}\right]\!\right] - 10x}{x^3 - 9x^2 + 24x - 20}$.

Solución.

Determinando el valor de la expresión con máximo entero:

$$x \to 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x - 1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} > 1 \Rightarrow \frac{3}{x-1} > 3 \Rightarrow \frac{3}{x-1} + 2 > 5 \Rightarrow \frac{2x+1}{x-1} > 5$$

$$\Rightarrow 5 < \frac{2x+1}{x-1} < 6 \Rightarrow \left[\!\left[\frac{2x+1}{x-1}\right]\!\right] = 5.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 \left[\!\left[\frac{2x+1}{x-1}\right]\!\right] - 10x}{x^3 - 9x^2 + 24x - 20} = \lim_{x \to 2^-} \frac{5x^2 - 10x}{x^3 - 9x^2 + 24x - 20} = \lim_{x \to 2^-} \frac{5x(x-2)}{(x-2)^2(x-5)}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{5x}{(x-2)(x-5)} = \frac{5(2)}{(0^-)(-3)} = \frac{(-10/3)}{0^-} = +\infty.$$

Para obtener el resultado de este problema se tuvo en cuenta la ecuación **(1.37)**. Fíjese que:

$\dfrac{c}{0^{-}} = \begin{cases} +\infty, & c < 0 \\ -\infty, & c > 0 \end{cases}$. Para este caso $c = (-10/3)$.

```
In[1]:= Limit[ (x^2 Floor[(2 x+1)/(x-1)] - 10 x) / (x^3 - 9 x^2 + 24 x - 20), x → 2, Assumptions → x < 2]
        límite                                                                  asunciones

Out[1]= ∞
```

Ejemplo 1.38. Evaluar: $\lim\limits_{x \to 2^-} \left[\dfrac{1}{x(x-2)} + \dfrac{\operatorname{sgn}\left[\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right]}{x^2 + \left[\!\left[\frac{x-2}{x+2}\right]\!\right] x - 2} \right]$.

Solución.

Analizando la función signo y el máximo entero:

$$x \to 2^- \Rightarrow \operatorname{sgn}\left[\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right] = \operatorname{sgn}\left[\left(\frac{2^-}{2}\right) - 1\right] = \operatorname{sgn}(1^- - 1) = \operatorname{sgn}(0^-) = -1.$$

$$x \to 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x + 2 < 4 \Rightarrow \frac{1}{x+2} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-4}{x+2} < -1 \Rightarrow \frac{-4}{x+2} + 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x+2} < 0 \Rightarrow -1 < \frac{x-2}{x+2} < 0 \Rightarrow \left[\!\left[\frac{x-2}{x+2}\right]\!\right] = -1.$$

Entonces, el límite propuesto queda:

$$L = \lim_{x\to 2^-}\left[\frac{1}{x(x-2)} + \frac{\operatorname{sgn}\left[\left(\frac{x}{2}\right)-1\right]}{x^2 + \left[\!\left[\frac{x-2}{x+2}\right]\!\right] x - 2}\right] = \lim_{x\to 2^-}\left[\frac{1}{x(x-2)} - \frac{1}{x^2-x-2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\left[\frac{1}{x(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+1)}\right] = \lim_{x\to 2^-}\left[\frac{(x+1)-x}{x(x-2)(x+1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\left[\frac{1}{x(x-2)(x+1)}\right] = \frac{1}{2(0^-)(3)} = \frac{(1/6)}{0^-} = -\infty.$$

```
In[2]:= Limit[1/(x (x - 2)) + Sign[x/2 - 1]/(x^2 Floor[(x-2)/(x+2)] x - 2), x → 2, Assumptions → x < 2]
        límite                                                               asunciones
Out[2]= -∞
```

Ejemplo 1.39. Evaluar: $\displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+2[\![x]\!]-9}{x^3-x^2-2x}$.

Solución.

Analizando el máximo entero:

$$x\to -1^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow -2 < x < -1 \Rightarrow [\![x]\!] = -2.$$

$$L = \lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+2[\![x]\!]-9}{x^3-x^2-2x} = \lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-4-9}{x^3-x^2-2x} = \lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-13}{x(x^2-x-2)} = \lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-13}{x(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{1-13}{(-1)(-3)(0^-)} = \frac{-4}{0^-} = +\infty.$$

```
In[3]:= Limit[(x^2 + 2 Floor[x] - 9)/(x^3 - x^2 - 2 x), x → -1, Assumptions → x < -1]
        límite                                          asunciones
Out[3]= ∞
```

Ejemplo 1.40. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+\left[\!\left[\frac{3x-5}{x-2}\right]\!\right]x-21}{x^3-5x^2+3x+9}$.

Solución.

Determinando el valor del máximo entero:

$$\frac{3x-5}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 3$$

$$x\to 3^- \Rightarrow x<3 \Rightarrow x-2<1 \Rightarrow \frac{1}{x-2} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x+2}+3>4 \Rightarrow 4 < \frac{3x-5}{x-2} < 5$$

$$\Rightarrow \left[\!\left[\frac{3x-5}{x-2}\right]\!\right] = 4.$$

Entonces, el límite propuesto queda:

$$L = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 + \left[\!\left[\frac{3x-5}{x-2}\right]\!\right] x - 21}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 + 4x - 21}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x+7)}{(x-3)^2(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{(x+7)}{(x-3)(x+1)} = \frac{10}{(0^-)(4)} = \frac{(5/2)}{(0^-)} = -\infty$$

```
In[4]:= Limit[(x^2 + Floor[(3 x-5)/(x-2)] x - 21)/(x^3 - 5 x^2 + 3 x + 9), x → 3, Assumptions → x < 3]
        límite                                                             asunciones

Out[4]= -∞
```

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Figueroa, "Análisis matemático 1", 4th ed., Lima-Perú: Ediciones R.F.G., 2011, pp. 252-261.

[2] M. Mitacc y L. Toro, "Tópicos de cálculo", 3rd ed., vol. 1, Lima-Perú: Editorial Thales S.R.L., junio del 2009, pp. 143-157.

[3] E. Espinoza, "Análisis Matemático I", 3rd ed., Lima-Perú, 2002, pp. 387-390.

EJERCICIOS PROPUESTOS

GRUPO 5

En los ejercicios del 1 al 16, calcular los límites.

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} \left[\dfrac{x^2 - \left[\!\left[\frac{3x+13}{x+2}\right]\!\right] x - 12}{x^2 - 7x + 10}\right]$

R. $-\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 3^-} \left(\dfrac{7 - [\![x^2 - 9]\!]}{x^2 - 9}\right)$

R. $-\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 3^-} \left(\dfrac{[\![x^2]\!] - 9}{x^2 - 9}\right)$

R. $+\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{[\![x^2]\!] + [\![2x]\!]^2}{x^2 - 1}\right)$

R. $-\infty$.

5. $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{[\![x^2 - 1]\!]}{x^2 - 1}\right)$

R. $+\infty$.

6. $\lim\limits_{x\to 4^+} \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x} - 2}\right)$

R. $+\infty$.

7. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3}$

R. $+\infty$.

8. $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{x - 4}.$

R. $-\infty$.

9. $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{3x^2+7x+2}{x^2+x-6}\right)$

R. $-\infty$.

10. $\lim\limits_{x\to 20^+}\dfrac{5x^3+1}{20x^3-8000x}$

R. $+\infty$.

11. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x^2-2|-4}{\sqrt{2-x}}$

R. $-\infty$.

12. $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2+|x^2-9|}{\sqrt{3-x}}$

R. $+\infty$.

13. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-|x^2-1|}{\sqrt{1-x}}$

R. $+\infty$.

14. $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x^2-9}\right)$

R. $+\infty$.

15. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{1}{x(x-1)}+\dfrac{\operatorname{sgn}\left[\left(\frac{x}{3}\right)+1\right]}{x^2+\left[\!\left[\frac{2x+3}{x+1}\right]\!\right]x-3}\right]$

R. $-\infty$.

16. $\lim\limits_{x\to 4^+}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x^2-16}\right)$

R. $+\infty$.

1.8. ASÍNTOTAS

La asíntota de una curva C es la recta L_1 cuya posición está definida por el límite de la distancia d de un punto P de la curva a dicha recta, que tiende a cero, cuando P se aproxima a L_1 [1–3]. Véase la figura 1.23.

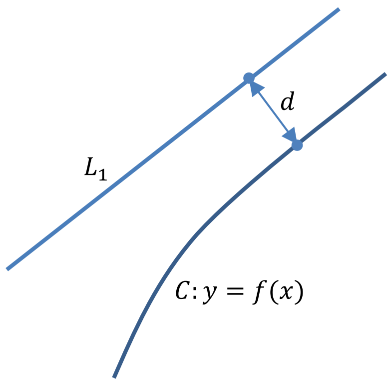


Figura 1.23. Representación gráfica de la asíntota de una curva [1–3].

Las asíntotas de una curva pueden ser: horizontales, verticales y oblicuas. A continuación, se da una definición más detallada de cada una de ellas.

1.8.1. ASÍNTOTA VERTICAL

Definición 1.7. Sea f una función real y x_0 un punto de acumulación del $\operatorname{Dom}(f)$. Se dice que la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de la gráfica de f, si se cumple al menos una de las siguientes condiciones [1–3]:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty. \qquad \textbf{(1.38)}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty. \quad \textbf{(1.39)}$$

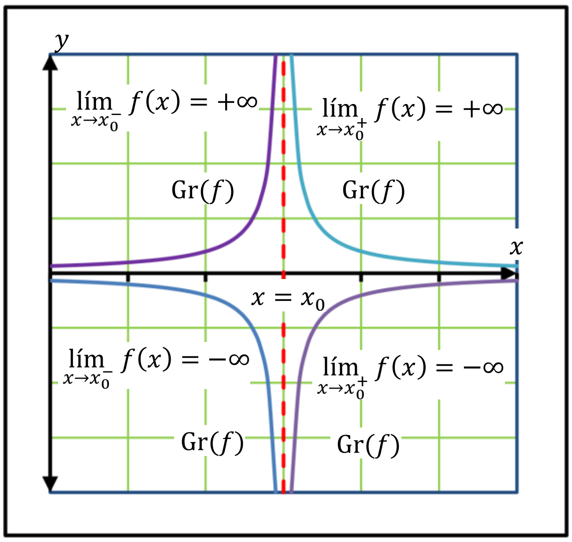


Figura 1.24. Representación gráfica de la asíntota vertical [3].

1.8.2. ASÍNTOTA HORIZONTAL

Definición 1.8. Sea f una función real de variable real. Se dice que la recta $y = y_0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f, si cumple al menos uno de los siguientes enunciados [1–3].

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0. \quad \textbf{(1.40)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0. \quad \textbf{(1.41)}$$

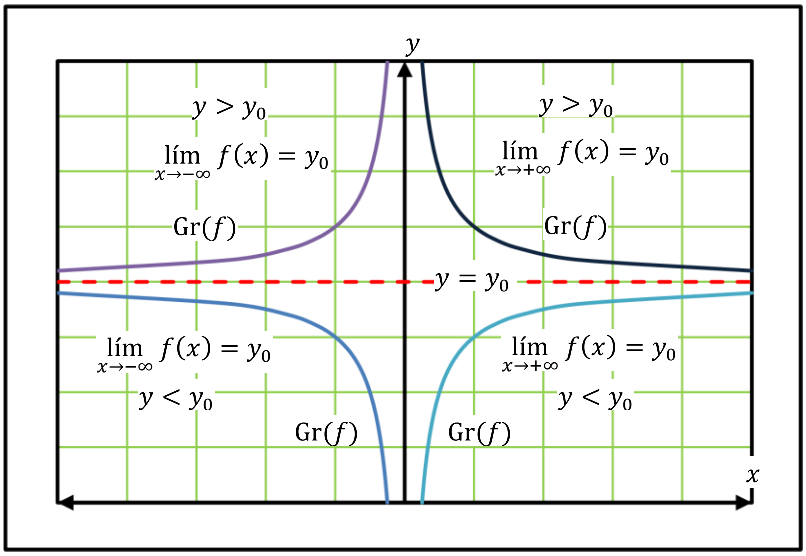


Figura 1.25. Representación gráfica de la asíntota horizontal [3].

1.8.3. ASÍNTOTA OBLICUA

Definición 1.9. La recta $y = mx + b$, es una asíntota oblicua de la gráfica de f, si se cumple al menos una de las siguientes condiciones [1–3]:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \ \text{ y } \ b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]. \qquad \textbf{(1.42)}$$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \ \text{ y } \ b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx]. \qquad \textbf{(1.43)}$$

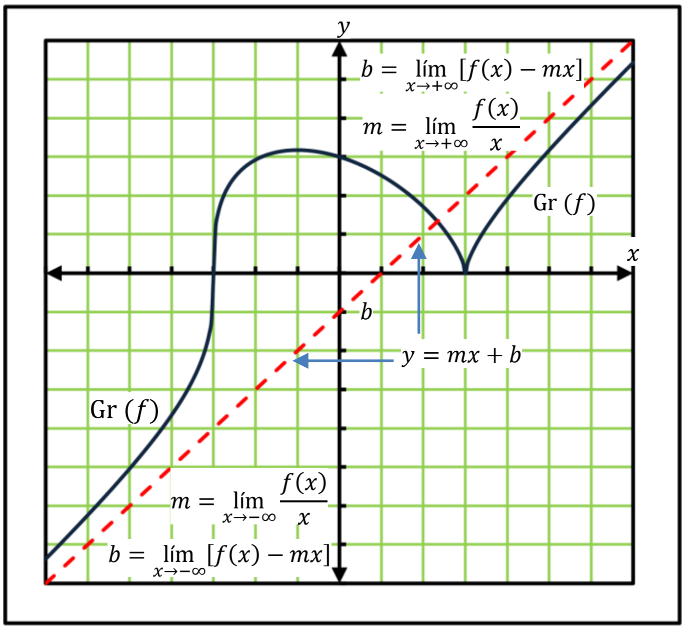


Figura 1.26. Representación gráfica de la asíntota oblicua [1–3].

Tenga en cuenta las siguientes consideraciones:

- Con respecto a las ecuaciones **(1.42)**, si al calcular los valores de m y b, uno de los límites no existe, la curva no presenta asíntota oblicua a la derecha.
- Con respecto a las ecuaciones **(1.43)**, si al calcular los valores de m y b, uno de los límites no existe, la curva no presenta asíntota oblicua a la izquierda.
- Si $m = 0$ y b es finito, la asíntota es horizontal.

Ejemplo 1.41. Hallar las asíntotas de la gráfica de la función: $f(x) = \left| \frac{x^2 - x}{x - 2} \right|$.

Solución.

Téngase en cuenta la propiedad de valor absoluto, para analizar cada una de las reglas de correspondencia de la función.

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Entonces, la función queda:

$$f(x)=\left|\frac{x^2-x}{x-2}\right|=\begin{cases}\dfrac{x-x^2}{x-2}, & \dfrac{x^2-x}{x-2}<0 \Rightarrow x\in(\langle-\infty,0\rangle\cup\langle 1,2\rangle),\ y\geq 0\\[2ex] \dfrac{x^2-x}{x-2}, & \dfrac{x^2-x}{x-2}\geq 0 \Rightarrow x\in([0,1]\cup\langle 2,+\infty\rangle),\ y\geq 0\end{cases}$$

$*$ Si $f(x)=\left|\dfrac{x^2-x}{x-2}\right|=\dfrac{x-x^2}{x-2} \Rightarrow x\in\ (\langle-\infty,0\rangle\cup\langle 1,2\rangle),\ y\geq 0$

• *Calculando la asíntota vertical*

Se observa que el denominador se hace cero para $x=2$, además:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-x^2}{x-2}=\frac{2-(2)^2}{(2^-)-2}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

```
In[1]:= Limit[(x - x^2)/(x - 2), x → 2, Assumptions → x < 2]
        límite                          asunciones
Out[1]= ∞
```

Por lo tanto, $x=2$ es una asíntota vertical.

• *Calculando la asíntota horizontal*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-x^2}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2[(1/x)-1]}{x[1-(2/x)]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x[(1/x)-1]}{[1-(2/x)]}=+\infty.$$

```
In[2]:= Limit[(x - x^2)/(x - 2), x → -∞]
        límite
Out[2]= ∞
```

Por lo tanto, no existe asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$ (a la izquierda).

• *Calculando la asíntota oblicua*

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-x^2}{x(x-2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2[(1/x)-1]}{x^2[1-(2/x)]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{[(1/x)-1]}{[1-(2/x)]}=-1.$$

```
In[3]:= Limit[(x - x^2)/(x (x - 2)), x → -∞]
        límite
Out[3]= -1
```

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-x^2}{x-2}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{-x}{x[1-(2/x)]}\right\}=-\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{1}{[1-(2/x)]}\right\}=-1.$$

Por lo tanto, la recta $y=-x-1$ es una asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$ (a la izquierda).

```
In[4]:= Limit[(x - x^2)/(x - 2) + x, x → -∞]
        límite

Out[4]= -1
```

$*\;$ Si $f(x)=\left|\dfrac{x^2-x}{x-2}\right|=\dfrac{x^2-x}{x-2}\Rightarrow x\in([0,1]\cup\langle 2,+\infty\rangle),\; y\geq 0$

• *Calculando la asíntota vertical*

Se observa que el denominador se hace cero para $x=2$, además:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-x}{x-2}=\frac{(2)^2-2}{(2^+)-2}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

```
In[5]:= Limit[(x^2 - x)/(x - 2), x → 2, Assumptions → x > 2]
        límite                          asunciones

Out[5]= ∞
```

Por lo tanto, $x=2$ es una asíntota vertical.

• *Calculando la asíntota horizontal*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2[1-(1/x)]}{x[1-(2/x)]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x[1-(1/x)]}{[1-(2/x)]}=+\infty.$$

```
In[6]:= Limit[(x^2 - x)/(x - 2), x → +∞]
        límite

Out[6]= ∞
```

Por lo tanto, no existe asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$ (a la derecha).

• *Calculando la asíntota oblicua*

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2[1-(1/x)]}{x^2[1-(2/x)]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{[1-(1/x)]}{[1-(2/x)]}=1.$$

```
In[7]:= Limit[(x^2 - x)/(x (x - 2)), x → +∞]
        límite

Out[7]= 1
```

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{x}{x[1-(2/x)]}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{[1-(2/x)]}\right\}=1.$$

```
In[8]:= Limit[(x^2 - x)/(x - 2) - x, x → +∞]
        límite

Out[8]= 1
```

Por lo tanto, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ (a la derecha).

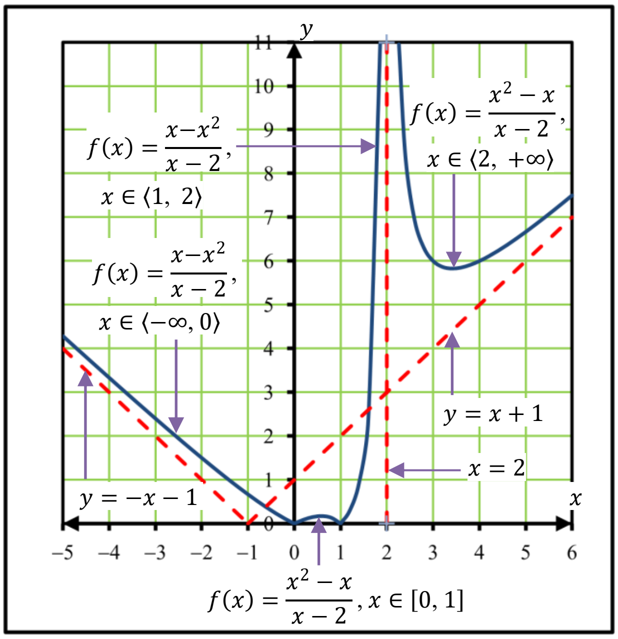


Figura 1.27. Representación gráfica de: $f(x) = \left|(x^2 - x)/(x-2)\right|$, en el ejemplo 1.41.

Ejemplo 1.42. Hallar las asíntotas de la gráfica de la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}, & |x| > 2 \\ \dfrac{x^3}{4-x^2}, & |x| < 2 \end{cases}$.

Solución.

$|x| > 2 \Leftrightarrow x \in (\langle -\infty,\ -2\rangle \cup \langle 2,\ +\infty\rangle)$, $\quad |x| < 2 \Leftrightarrow x \in \langle -2, 2\rangle$

$* \ f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, $x \in (\langle -\infty,\ -2\rangle \cup \langle 2,\ +\infty\rangle)$

• *Calculando las asíntotas verticales*

Se observa que el denominador se hace cero para $x = -2$ y $x = 2$, además:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{(-2)^2}{\sqrt{(-2^-)^2 - 4}} = \frac{4}{\sqrt{4^+ - 4}} = \frac{4}{0^+} = +\infty \, .$$

```
In[9]:= Limit[x^2/Sqrt[x^2 - 4], x → -2, Assumptions → x < -2]
        límite                           asunciones

Out[9]= ∞
```

Por lo tanto, $x = -2$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{(2)^2}{\sqrt{(2^+)^2-4}} = \frac{4}{\sqrt{4^+-4}} = \frac{4}{0^+} = +\infty.$$

In[10]:= Limit$\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}, x \to 2, \text{Assumptions} \to x > 2\right]$
límite asunciones

Out[10]=
∞

Por lo tanto, $x = 2$ es una asíntota vertical.

• *Calculando las asíntotas horizontales*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}} = -\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}} = +\infty.$$

In[11]:= Limit$\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}, x \to -\infty\right]$
límite

Out[11]=
∞

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}} = +\infty.$$

In[12]:= Limit$\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}, x \to \infty\right]$
límite

Out[12]=
∞

Por lo tanto, no existen asíntotas horizontales

• *Calculando las asíntotas oblicuas*

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x^2\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}} = -\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}} = -1.$$

In[13]:= Limit$\left[\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-4}}, x \to -\infty\right]$
límite

Out[13]=
-1

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}\right]=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{4}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}\right]}=-\frac{(0)}{\sqrt{1-(0)}\left[1+\sqrt{1-(0)}\right]}=-\frac{(0)}{(1)(2)}=0.$$

In[14]:= Limit[$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$ + x, x → -∞]
límite

Out[14]=
0

Por lo tanto, la recta $y=-x$ es una asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$ (a la izquierda).

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}}=1.$$

In[15]:= Limit[$\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-4}}$ + x, x → +∞]
límite

Out[15]=
∞

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{4}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{4}{x^2}\right)}\right]}=\frac{(0)}{\sqrt{1-(0)}\left[1+\sqrt{1-(0)}\right]}=\frac{(0)}{(1)(2)}=0.$$

In[16]:= Limit[$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$ - x, x → +∞]
límite

Out[16]=
0

Por lo tanto, la recta $y=x$ es una asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$ (a la derecha).

$*\ f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2},\ x\in\langle-2,2\rangle$

• *Calculando las asíntotas verticales*

Se observa que el denominador se hace cero para $x=-2$ y $x=2$, además:

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^3}{4-x^2}=\frac{(-2)^3}{4-(-2^+)^2}=-\frac{8}{4-4^-}=-\frac{8}{0^+}=-\infty.$$

Por lo tanto, $x=-2$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3}{4-x^2}=\frac{(2)^3}{4-(2^-)^2}=\frac{8}{4-4^-}=\frac{8}{0^+}=+\infty.$$

Por lo tanto, $x=2$ es una asíntota vertical.

Como $x\in\langle -2,2\rangle$, no tiene sentido analizar los limites infinitos para $f(x)=\frac{x^3}{4-x^2}$.

Por lo tanto, no existen asíntotas horizontales y oblicuas para $f(x)=\frac{x^3}{4-x^2}$.

La gráfica de $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}, & |x|>2\\ \dfrac{x^3}{4-x^2}, & |x|<2\end{cases}$, se muestra en la figura 1.28.

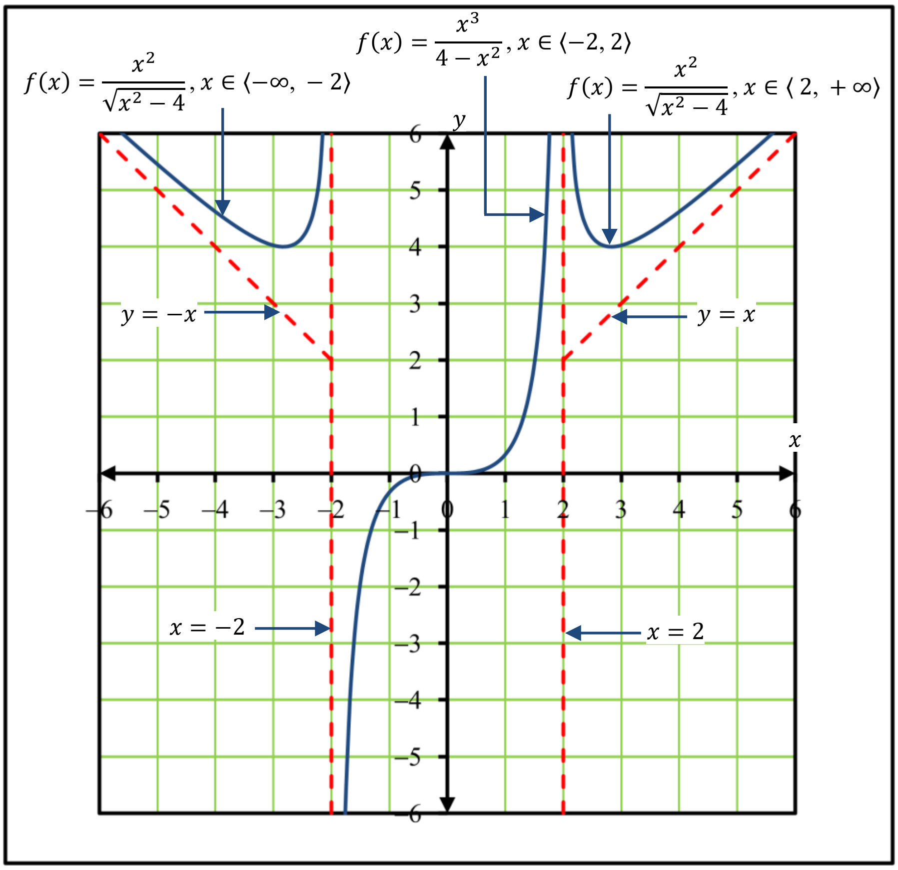


Figura 1.28. Representación gráfica de: $f(x)=\begin{cases}x^2/\sqrt{x^2-4}, & |x|>2\\ x^3/(4-x^2), & |x|<2\end{cases}$, en el ejemplo 1.42.

Ejemplo 1.43. Hallar las asíntotas de la gráfica de la función: $f(x)=\begin{cases} [\![2+(2/x)]\!], & x<-3 \\ \sqrt[3]{\dfrac{2x+2}{x-1}}, & -3\le x<1 \\ \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}, & x\ge 1 \end{cases}$

Solución.

$$-\infty<x<-3 \Rightarrow -\frac{1}{3}<\frac{1}{x}<0 \Rightarrow -\frac{2}{3}<\frac{2}{x}<0 \Rightarrow \frac{4}{3}<\frac{2}{x}+2<2$$

$$\Rightarrow 1<\frac{4}{3}<\frac{2}{x}+2<2 \Rightarrow 1<\frac{2}{x}+2<2 \Rightarrow [\![2+(2/x)]\!]=1.$$

Es decir: $\forall x<-3,\ [\![2+(2/x)]\!]=1$.

$f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2x+2}{x-1}},\ -3\le x<1.$

• *Calculando la asíntota vertical*

Se observa que el denominador se hace cero para $x=1$, además:

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt[3]{\frac{2x+2}{x-1}}=\sqrt[3]{\frac{4}{0^-}}=-\infty.$$

Por lo tanto $x=1$ es una asíntota vertical.

Como $-3\le x<1$, no tiene sentido analizar las asíntotas horizontales y oblicuas.

$f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2},\ x\ge 1.$

• *Calculando la asíntota vertical*

Como $x\ge 1$, no tiene sentido analizar la asíntota vertical en $x=-1$.

• *Calculando la asíntota oblicua*

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(x-1)^3}{x^3}}{\frac{x(x+1)^2}{xx^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)^3}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[1-\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3}{\left[1+\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2}$$

$$=\frac{(1-0)^3}{(1+0)^2}=1.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x-1)^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+3x-1-x^3-2x^2-x}{(x+1)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right]$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{5x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\right] = -\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}\left[\frac{5-2\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1+2\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right]$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{5-2\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1+2\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right] = -\left[\frac{5-2(0)+(0)}{1+2(0)+(0)}\right] = -5.$$

Por lo tanto, la recta $y = x - 5$ es una asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ (a la derecha).

La gráfica se muestra en la figura 1.29.

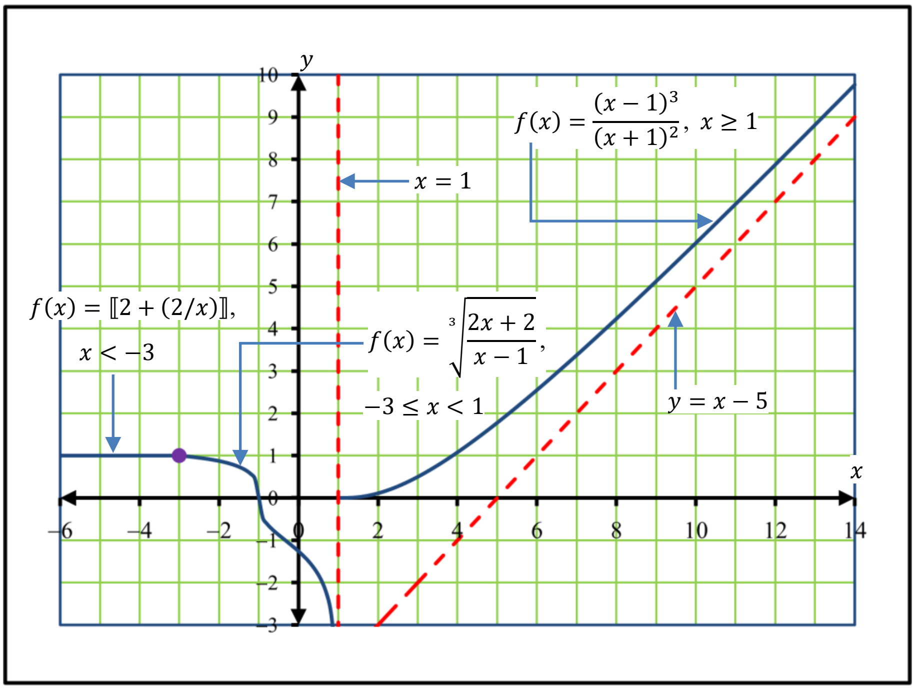


Figura 1.29. Representación gráfica de: $f(x) = \begin{cases} [\![2+(2/x)]\!], & x < -3 \\ \sqrt[3]{\frac{2x+2}{x-1}}, & -3 \leq x < 1 \\ \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}, & x \geq 1 \end{cases}$, en el ejemplo 1.43.

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Figueroa, “Análisis matemático 1”, 4th ed., Lima-Perú: Ediciones R.F.G., 2011, pp. 269-285.

[2] M. Mitacc y L. Toro, “Tópicos de cálculo”, 3rd ed., vol. 1, Lima-Perú: Editorial Thales S.R.L., junio del 2009, pp. 158-172.

[3] E. Espinoza, “Análisis Matemático I”, 2nd ed., Lima-Perú, 1998, pp. 418-424.

EJERCICIOS PROPUESTOS

GRUPO 6

En los ejercicios del 1 al 12, hallar las asíntotas de la gráfica de la función definida por las ecuaciones dadas.

1. $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}, & |x|<2 \\ \dfrac{2x^2}{x^2+x}, & |x|\geq 2 \end{cases}$

R. $x=2,\ y=2.$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}, & |x|>2 \\ \sqrt{\dfrac{2x^2-x^3}{x+2}}, & x\in\langle -2,2] \end{cases}$

R. $x=\pm 2,\ y=\pm x.$

3. $f(x)=\dfrac{2x^3+3x+1}{x^2-x-6}+\sqrt{x^2+6}$

R. $x=-2,\ x=3,\ y=x+2,\ y=3x+2.$

4. $f(x)=\begin{cases} \sqrt[5]{\dfrac{x^8+2x+1}{x^3+8}}, & x\leq -1 \\ \left[\!\left[-\dfrac{x+1}{x+3}\right]\!\right], & -1<x\leq 1 \\ \sqrt{\dfrac{x[\![2+(1/x)]\!]+7}{2x-1}}, & x>1 \end{cases}$

R. $x=-2,\ y=1,\ y=x.$

5. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}, & x\in\langle -\infty,1\rangle \\ \sqrt{x^2-x}, & x\in[1,+\infty\rangle \end{cases}$

R. $x=1,\ y=1,\ y=x-\dfrac{1}{2}.$

6. $f(x)=\sqrt[4]{x^4-5x^3-4x^2+20x}$

R. $y=x-\dfrac{5}{4},\ y=-x+\dfrac{5}{4}.$

7. $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x-3}}, & x\leq -3 \\ \dfrac{3|x+3|}{x+1}, & -3<x\leq 2 \wedge x\neq -1. \\ \left[\!\left[5+\dfrac{2}{x}\right]\!\right], & x>2 \end{cases}$

R. $x=-1,\ y=1,\ y=5.$

8. $f(x)=3-2x-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-x-2}}$

R. $x=-1,\ x=2,\ y=-x+\dfrac{7}{2},$
$y=-3x+\dfrac{5}{2}.$

9. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+x-6}, & x<-3 \\ \dfrac{x^3+7x^2+3x-27}{x^3+5x^2+6x}, & x>-3 \end{cases}$

R. $x=-3,\ x=-2,\ x=0,\ y=1.$

10. $f(x)=\sqrt[4]{x^4-x^3-9x^2+9x}$

R. $y=-x+\dfrac{1}{4},\ y=x-\dfrac{1}{4}.$

11. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-4x-21)(x^2+2x+3)}{(x-1)^2(2x^2-3x+5)}, & x < -3 \\ \dfrac{x^3+x^2-2x}{(x-2)(x^2+2x-3)}, & -3 < x < 2 \wedge x \neq -1. \\ \sqrt[3]{6x^2-x^3}, & x \geq 2 \end{cases}$

R. $x=-3,\ x=2,\ y=\dfrac{1}{2},\ y=-x+2.$

12. $f(x) = \begin{cases} 7x - \dfrac{11}{3} + \dfrac{7x^2}{\sqrt{x^2+5}}\ , & |x| \geq 6 \\ \dfrac{x^3}{36-x^2}, & |x| < 6 \end{cases}$

R. $x=\pm 6,\ y=-\dfrac{11}{3},\ y=14x-\dfrac{11}{3}.$

En los ejercicios del 13 al 24, hallar las asíntotas de cada curva.

13. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}$

R. $x=a.$

14. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

R. $x=1,\ x=-1,\ y=\pm x.$

15. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$

R. $y=\pm x.$

16. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$

R. $x=0,\ \ y=x+2.$

17. $f(x)=\dfrac{x^2+9}{(x-3)^2}$

R. $x=3,\ y=1.$

18. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+2x^3-12x^2-8x+32}$

R. $x=\pm 2,\ x=-4,\ y=0.$

19. $xy^2-3y^2-4x=8$

R. $x=3,\ y=-2,\ y=2.$

20. $y^2(x-2a)=x^3-a^3$

R. $x=2a,\ y=\pm(x+a).$

21. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

R. $x=-1,\ y=x-2.$

22. $2y(x+1)^2=x^3$

R. $x=-1,\ y=(x-2)/2.$

23. $f(x)=x+\sqrt[4]{\dfrac{x^6-9x^4-x^2+9}{x^2-5}}$

R. $x=\pm\sqrt{5},\ y=0,\ y=2x.$

24. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+5}{-x-1}$

R. $x=-1,\ y=-2x+5.$

1.9. LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

1.9.1. LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para el cálculo de límites de funciones trigonométricas, es necesario conocer lo siguiente [1–3]:

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1\,. \tag{1.44}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{1.45}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1. \tag{1.46}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0. \tag{1.47}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{1.48}$$

Ejemplo 1.44. Demostrar las ecuaciones **(1.44)** y **(1.45)**.

Solución.

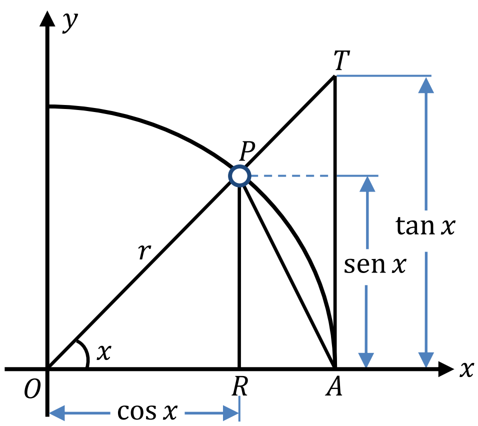


Figura 1.30. Círculo trigonométrico en el primer cuadrante [1–2].

Teniendo en cuenta la figura 1.30, se tiene que:

$x \in \langle 0, \pi/2\,\rangle$; $P(\cos x,\ \operatorname{sen} x)$; $A(1,0)$; $R(\cos x\,, 0)$; $T(1,\ \tan x)$

Además:

$$\mathrm{A}_{\Delta(OAP)} < \mathrm{A}_{\mathrm{Sector}(OAP)} < \mathrm{A}_{(OAT)}. \tag{D1-1.44}$$

$$\overline{OA} = r = 1 \Rightarrow \overline{PR} < x < \overline{AT} \Rightarrow \operatorname{sen} x < x < \tan x\,. \tag{D2-1.44}$$

Como $\operatorname{sen} x > 0\,, \forall x \in \langle 0, \pi/2\,\rangle$, entonces a la desigualdad **(D2-1.44)** se le puede hacer entre $\operatorname{sen} x$, de manera que:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1. \tag{D3-1.44}$$

Si $d(A,P) < x \;\Rightarrow\; \sqrt{(1-\cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x} < x \;\Rightarrow\; \sqrt{1 - 2\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} < x$

$$\Rightarrow \sqrt{2-2\cos x} < x \Rightarrow 2-2\cos x < x^2 \Rightarrow 1-\frac{x^2}{2} < \cos x. \qquad \textbf{(D4-1.44)}$$

De las desigualdades **(D3-1.44)** y **(D4-1.44)**, se tiene que:

$$1-\frac{x^2}{2} < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1, \quad x \in \langle 0, \pi/2 \rangle. \qquad \textbf{(D5-1.44)}$$

Si en caso $x \in \langle -\pi/2, 0\rangle \Rightarrow -\pi/2 < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < \pi/2$. En la desigualdad **(D5-1.44)** cambiando x por $-x$ y como $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, se tiene que:

$$1-\frac{(-x)^2}{2} < \cos(-x) < \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} < 1, x \in \langle -\pi/2, 0 \rangle.$$

$$1-\frac{x^2}{2} < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1, x \in \langle -\pi/2, 0 \rangle. \qquad \textbf{(D6-1.44)}$$

Esto indica que las desigualdades **(D5-1.44)** y **(D6-1.44)** se cumplen para todo x, tal que: $0 < |x| < \pi/2$.

Aplicando límite en **(D5-1.44)** y **(D6-1.44)**, se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = 1 \text{ y } \lim_{x\to 0}(1) = 1.$$

Aplicando el teorema de sándwich y teniendo en cuenta que $\cos x$ y $\operatorname{sen} x/x$, representan las funciones intermedias, se concluye que:

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \text{ y } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Ejemplo 1.45. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{\tan^2 x}$.

Solución.

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{\tan^2 x}$$

Dividiendo tanto numerador como denominador entre x^2, se tiene:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2}}{\dfrac{\tan^2 x}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)}{x^2}}{\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}\right)^2}\lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x)$$

$$= \frac{(1/2)}{(1)^2}[1+1+(1)^2] = \frac{3}{2}.$$

Calculando el límite, haciendo uso de la sintaxis que muestra Wolfram Research [4]:

```
In[1]:= Limit[(1 - (Cos[x])^3)/(Tan[x])^2, x -> 0]
        límite

Out[1]= 3/2
```

Note que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}=\frac{1}{2}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\,,\quad \lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x)=1+1+(1)^2.$$

Ejemplo 1.46. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 5x-\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}$.

Solución.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x-\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5\operatorname{sen} 5x}{5x}-\frac{3\operatorname{sen} 3x}{3x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}=\frac{5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}-3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$=\frac{5(1)-3(1)}{1}=2.$$

El cálculo mediante Wolfram Mathematica es:

```
In[2]:= Limit[(Sin[5 x] - Sin[3 x])/Sin[x], x -> 0]
        límite

Out[2]= 2
```

Ejemplo 1.47. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$.

Solución.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x\,(1-\cos^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\operatorname{sen} x\,(1-\cos^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{\cos x\,(1-\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{\cos x\,(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x\,(1+\cos x)}=\frac{1}{2}.$$

```
In[3]:= Limit[(Tan[x] - Sin[x])/(Sin[x])^3, x -> 0]
        límite

Out[3]= 1/2
```

Ejemplo 1.48. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x(2-x)\tan bx}$.

Solución.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x(2-x)\tan bx}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2(2-x)\frac{\tan bx}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\left[\frac{1-\cos ax}{(ax)^2}\right]}{b(2-x)\frac{\tan bx}{bx}}$$

$$=\frac{a^2 \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1-\cos ax}{(ax)^2}\right]}{b \lim\limits_{x\to 0}(2-x)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan bx}{bx}}=\frac{a^2\left(\frac{1}{2}\right)}{b(2)\ (1)}=\frac{a^2}{4b}.$$

```
In[4]:= Limit[ (1 - Cos[a x]) / (x (2 - x) Tan[b x]) , x -> 0]
        límite

Out[4]= a^2/(4 b)
```

Ejemplo 1.49. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 8x-\operatorname{sen}^2 4x}{x^2}$.

Solución.

Aplicando la propiedad: $\operatorname{sen} 2u = 2\operatorname{sen} u\cos u$.

Entonces: $\operatorname{sen} 8x = 2\operatorname{sen} 4x\cos 4x$.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 8x-\operatorname{sen}^2 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(2\operatorname{sen} 4x\cos 4x)^2-\operatorname{sen}^2 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\operatorname{sen}^2 4x\cos^2 4x-\operatorname{sen}^2 4x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 4x\,(4\cos^2 4x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{16\operatorname{sen}^2 4x\,(4\cos^2 4x-1)}{(4x)^2}$$

$$=16\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 4x}{(4x)^2}\lim_{x\to 0}(4\cos^2 4x-1)=16(1)(4-1)=48.$$

```
In[5]:= Limit[ ((Sin[8 x])^2 - (Sin[4 x])^2) / x^2 , x -> 0]
        límite

Out[5]= 48
```

Ejemplo 1.50. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{\tan(a+x)-\tan(a-x)}$.

Solución.

Aplicando las propiedades:

$$\operatorname{sen}(a+x)=\operatorname{sen} a\cos x+\operatorname{sen} x\cos a$$

$$\operatorname{sen}(a-x)=\operatorname{sen} a\cos x-\operatorname{sen} x\cos a$$

$$\tan(a+x)=\frac{\tan a+\tan x}{1-\tan a\tan x}$$

$$\tan(a-x)=\frac{\tan a-\tan x}{1+\tan a\tan x}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{\tan(a+x)-\tan(a-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} a\cos x + \operatorname{sen} x\cos a - \operatorname{sen} a\cos x + \operatorname{sen} x\cos a}{\frac{\tan a+\tan x}{1-\tan a\tan x} - \left(\frac{\tan a-\tan x}{1+\tan a\tan x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x\cos a\,(1-\tan^2 a\tan^2 x)}{(\tan a+\tan x)(1+\tan a\tan x)-(\tan a-\tan x)(1-\tan a\tan x)}$$

Note que:

$$(\tan a+\tan x)(1+\tan a\tan x) = \tan a + \tan^2 a\tan x + \tan x + \tan a\tan^2 x$$

$$(\tan a-\tan x)(1-\tan a\tan x) = \tan a - \tan^2 a\tan x - \tan x + \tan a\tan^2 x$$

$$(\tan a+\tan x)(1+\tan a\tan x)-(\tan a-\tan x)(1-\tan a\tan x) = 2\tan^2 a\tan x + 2\tan x$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x\cos a\,(1-\tan^2 a\tan^2 x)}{2\tan^2 a\tan x + 2\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x\cos a\,(1-\tan^2 a\tan^2 x)}{2\tan x\,(\tan^2 a+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos a\,(1-\tan^2 a\tan^2 x)\cos x}{(\tan^2 a+1)} = \frac{\cos a}{(\tan^2 a+1)}\lim_{x\to 0}[(1-\tan^2 a\tan^2 x)\cos x]$$

$$= \frac{\cos a}{(\tan^2 a+1)} = \frac{\cos a}{\sec^2 a} = \cos a\cos^2 a = \cos^3 a\,.$$

```
In[6]:= Limit[(Sin[a + x] - Sin[a - x])/(Tan[a + x] - Tan[a - x]), x -> 0]
        límite

Out[6]= Cos[a]^3
```

Ejemplo 1.51. Calcular: $\lim_{x\to -2^+} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x^2-4}$.

Solución.

$$L = \lim_{x\to -2^+} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{(x-2)(x+2)}$$

Haciendo el cambio de variable: $u = x+2$, si $x \to -2^+ \Rightarrow u = 0^+$.

$$L = \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}[\pi(u-2)]}{u(u-4)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\pi u\cos 2\pi - \operatorname{sen} 2\pi\cos 2u}{u(u-4)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\pi u}{u(u-4)}$$

Note que: $\cos 2\pi = 1$ y $\operatorname{sen} 2\pi = 0$

$$L = \lim_{u\to 0^+} \frac{\pi\operatorname{sen}\pi u}{\pi u(u-4)} = \pi\lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\pi u}{\pi u}\lim_{u\to 0^+} \frac{1}{(u-4)} = \pi(1)\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

```
In[7]:= Limit[Sin[π x]/(x^2 - 4), x → -2, Assumptions → x > -2]
        límite                              asunciones

Out[7]= -π/4
```

Ejemplo 1.52. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$.

Solución.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos x+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x-1)^2-\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x-1)^2}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \left[\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{x}\right]^2 - \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2$$

$$= (0)^2-(1)^2 = -1.$$

Note que se aplicó la propiedad: $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

```
In[8]:= Limit[(1 - 2 Cos[x] + Cos[2 x])/x^2, x -> 0]
        límite

Out[8]= -1
```

Ejemplo 1.53. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^6}{(\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x)^2}$.

Solución.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6}{(\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\left(\dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x\cos x}{x^3}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\left[\dfrac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{x^3}\right]^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\left[\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)\right]^2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \cos^2 x}{\left[\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)\right]^2} = \frac{1}{\left[(1)\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2} = \frac{1}{\left[(1)\left(\frac{1}{4}\right)\right]} = 4.$$

```
In[9]:= Limit[x^6/(Tan[x] - Sin[x])^2, x -> 0]
        límite

Out[9]= 4
```

Ejemplo 1.54. Calcular: $\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{sen} 6x}{3x-2\pi}$.

Solución.

Haciendo el cambio de variable: $3x-2\pi = u \ \Rightarrow\ x \to \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow u \to 0.$

$$\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} 6x}{3x-2\pi} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}[2(u+2\pi)]}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2u}{u} = 2\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2u}{2u} = 2(1) = 2.$$

In[10]:= $\text{Limit}\left[\frac{\text{Sin}[6\,x]}{3\,x - 2\,\pi},\ x \to \frac{2\,\pi}{3}\right]$
límite

Out[10]=

2

Ejemplo 1.55. Calcular: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\right)$.

Solución.

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)} - \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2-(1+\operatorname{sen} x)}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1-\operatorname{sen} x}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\operatorname{sen} x)}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

In[11]:= $\text{Limit}\left[\frac{2}{(\text{Cos}[x])^2} - \frac{1}{1-\text{Sin}[x]},\ x \to \frac{\pi}{2}\right]$
límite

Out[11]=

$\frac{1}{2}$

Ejemplo 1.56. Calcular: $\lim_{x\to+\infty} \left\{\frac{\cot\left(\frac{1}{x}\right)\left[\left[\!\left[\frac{x+1}{x}\right]\!\right] - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{x}\right\}$.

Solución.

$$\left[\!\left[\frac{x+1}{x}\right]\!\right] = \left[\!\left[1+\frac{1}{x}\right]\!\right] = 1 + \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right].$$

Si $x\to+\infty \Rightarrow x < +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] = 0.$

$$\Rightarrow \left[\!\left[\frac{x+1}{x}\right]\!\right] = 1 + 0 = 1.$$

$$L = \lim_{x\to+\infty} \left\{\frac{\cot\left(\frac{1}{x}\right)\left[\left[\!\left[\frac{x+1}{x}\right]\!\right] - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{x}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \left\{\frac{\cot\left(\frac{1}{x}\right)\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{x}\right\}.$$

Haciendo el cambio: $y = 1/x$

Si $x\to+\infty \Rightarrow y\to 0^+$

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{\cot\left(\frac{1}{x}\right)\left[1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{x}\right\} = \lim_{y\to0^+} y\cot y(1-\cos y) = \lim_{y\to0^+} y\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}(1-\cos y)$$

$$= \lim_{y\to0^+}\frac{y}{\operatorname{sen} y}\lim_{y\to0^+}[\cos y\,(1-\cos y)] = \left(\lim_{y\to0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)^{-1}\lim_{y\to0^+}[\cos y\,(1-\cos y)]$$

$$= (1)^{-1}[(1)(1-1)] = (1)(0) = 0.$$

```
In[12]:= Limit[Cot[1/x] (Floor[(x+1)/x] - Cos[1/x]) / x, x → +∞]
         límite
Out[12]=
         0
```

Ejemplo 1.57. Analizar la existencia o no existencia de: $\lim_{x\to0}\left[\operatorname{sen}\sqrt{1+\frac{1}{|x|}} - \operatorname{sen}\sqrt{\frac{1}{|x|}}\right]$.

Solución.

Haciendo el cambio de variable: $y = \frac{1}{|x|}$.

Si $x\to0 \Rightarrow y\to+\infty$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\left[\operatorname{sen}\sqrt{1+\frac{1}{|x|}} - \operatorname{sen}\sqrt{\frac{1}{|x|}}\right] = \lim_{y\to+\infty}\left[\operatorname{sen}\sqrt{1+y} - \operatorname{sen}\sqrt{y}\right].$$

$$\operatorname{sen}\sqrt{1+y} - \operatorname{sen}\sqrt{y} = 2\cos\left(\frac{\sqrt{1+y}+\sqrt{y}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{1+y}-\sqrt{y}}{2}\right).$$

$$\left|\operatorname{sen}\sqrt{1+y} - \operatorname{sen}\sqrt{y}\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\sqrt{1+y}+\sqrt{y}}{2}\right)\right|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{1+y}-\sqrt{y}}{2}\right)\right|.$$

Como $\left|\cos\left(\frac{\sqrt{1+y}+\sqrt{y}}{2}\right)\right| \le 1$, entonces:

$$0 < \left|\operatorname{sen}\sqrt{1+y} - \operatorname{sen}\sqrt{y}\right| \le 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{1+y}-\sqrt{y}}{2}\right)\right|. \qquad \textbf{(D1-1.57)}$$

Aplicando límite en la desigualdad **(D1-1.57)**

$$\lim_{y\to+\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{1+y}-\sqrt{y}}{2}\right) = \lim_{y\to+\infty}\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2\left(\sqrt{1+y}+\sqrt{y}\right)}\right] = \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2\left(\sqrt{1+\infty}+\sqrt{\infty}\right)}\right] = \operatorname{sen}(0) = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to+\infty}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{1+y}-\sqrt{y}}{2}\right)\right| = 0.$$

Por el teorema de sándwich, se tiene que:

$$\lim_{y\to+\infty}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{1+y}-\sqrt{y}}{2}\right)\right| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{y\to+\infty}\left|\operatorname{sen}\sqrt{1+y}-\operatorname{sen}\sqrt{y}\right| = 0.$$

Como $\lim\limits_{y\to+\infty}\left|\operatorname{sen}\sqrt{1+y}-\operatorname{sen}\sqrt{y}\right| = 0$, entonces $\lim\limits_{y\to+\infty}\left[\operatorname{sen}\sqrt{1+y}-\operatorname{sen}\sqrt{y}\right] = 0$.

Nótese que $\left|\operatorname{sen}\sqrt{1+y}-\operatorname{sen}\sqrt{y}\right|$, es la función intermedia.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left[\operatorname{sen}\sqrt{1+\frac{1}{|x|}}-\operatorname{sen}\sqrt{\frac{1}{|x|}}\right] = \lim_{y\to+\infty}\left[\operatorname{sen}\sqrt{1+y}-\operatorname{sen}\sqrt{y}\right] = 0.$$

Ejemplo 1.58. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(cx)}{x}, & x>0 \\ 2, & x=0 \\ \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x}, & x<0 \end{cases}$

a) Para qué valor de c existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) Para el valor de c encontrado, es verdad que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Solución.

a)

Para que exista $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 0} f(x)$, se debe de cumplir que: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Calculando $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x}$$

Aplicando la propiedad:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen} x = \frac{\cos x}{2}-\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen} x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\cos x}{2}-\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen} x}{2}-\frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-\sqrt{3}\operatorname{sen} x-1}{2x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{3}\operatorname{sen} x-(1-\cos x)}{2x}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{(1-\cos x)}{x} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1)-\left(\frac{1}{2}\right)(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(cx)}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; c\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(cx)}{cx} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; c = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b)

No es cierto que para el valor de c encontrado, es verdad que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, pues:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \text{ y } \ f(0) = 2.$$

1.9.2. LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

El cálculo de límites de funciones trigonométricas inversas, requiere hacer uso de las siguientes ecuaciones y propiedades que se dan a continuación [1–3]:

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{arcsen} x) = 0. \tag{1.49}$$

$$\lim_{x\to 0}(\arctan x) = 0. \tag{1.50}$$

$$\lim_{x\to 0}(\arccos x) = \frac{\pi}{2}. \tag{1.51}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1. \tag{1.52}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1. \tag{1.53}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}. \tag{1.54}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}. \tag{1.55}$$

a) $\operatorname{arcsen} x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

b) $\arctan a - \arctan b = \arctan\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$

c) $\arccos x = \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}$.

d) $\arctan(a+x) - \arctan(a-x) = \arctan\left(\dfrac{2x}{1+a^2-x^2}\right)$

Ejemplo 1.59. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\operatorname{arcsen} x}{2x+\arctan x}$

Solución.

Dividiendo tanto el numerador como denominador entre x:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{arcsen} x}{2x+\arctan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{\arctan x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}}{2+\frac{\arctan x}{x}} = \frac{2-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}}{2+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Note que se aplicó las ecuaciones **(1.52)** y **(1.53)**.

```
In[13]:= Limit[(2 x - ArcSin[x])/(2 x + ArcTan[x]), x → 0]
         límite

Out[13]= 1/3
```

Ejemplo 1.60. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\cos x}-1\right)}{\sqrt{\operatorname{arcsen} x+1}-1}$

Solución.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\cos x}-1\right)}{\sqrt{\operatorname{arcsen} x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\cos x}-1\right)\left(\sqrt{\operatorname{arcsen} x+1}+1\right)\left(\sqrt{\cos x}-1\right)}{\left(\sqrt{\cos x}-1\right)\operatorname{arcsen} x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\cos x}-1\right)}{\left(\sqrt{\cos x}-1\right)}\ \operatorname{Lim}_{x\to 0}\left(\sqrt{\operatorname{arcsen} x+1}+1\right)\ \operatorname{Lim}_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\operatorname{arcsen} x}$$

Evaluando por separado cada límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\cos x}-1\right)}{\left(\sqrt{\cos x}-1\right)}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\operatorname{arcsen} x+1}+1\right)=1+1=2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\operatorname{arcsen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{arcsen} x\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}=-\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{\operatorname{arcsen} x\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-\cos x)}{x}}{\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}=-\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}$$

$$=-\frac{0}{(1)(2)}=0.$$

Entonces:

$$L=(1)(2)(0)=0.$$

```
In[14]:= Limit[ ArcSin[√Cos[x] - 1] / (√ArcSin[x] + 1 - 1) , x → 0]
         límite

Out[14]=
         0
```

Ejemplo 1.61. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{2x(\operatorname{arcsen} x)^2+\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}\right].$

Solución.

$$L=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2x(\operatorname{arcsen} x)^2+\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}\right]=2\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}\frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{x^2}+\lim_{x\to 0^+}\frac{(\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x)}{x^3}$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\right)^2+\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\frac{(1-\cos x)}{x^3}=2(1)^2+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{(1-\cos x)}{x^2}$$

$$=2+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos x)}{x^2}=2+(1)(1)\left(\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

```
In[15]:= Limit[(2 x (ArcSin[x])^2 + Tan[x] - Sin[x])/x^3, x → 0, Assumptions → x > 0]
         límite                                              asunciones
Out[15]= 5/2
```

Ejemplo 1.62. Calcular: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{\arctan\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)}{1+\cos 2x}\right]$.

Solución.

Aplicando la propiedad:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1-2\operatorname{sen}^2 x\,.$$

$$1+\cos 2x=1+1-2\operatorname{sen}^2 x=2-2\operatorname{sen}^2 x=2(1-\operatorname{sen}x)(1+\operatorname{sen}x)=-2(\operatorname{sen}x-1)(1+\operatorname{sen}x)$$

$$=-2(1+\operatorname{sen}x)\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}+\sqrt{2}\right).$$

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\arctan\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)}{1+\cos 2x}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\arctan\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)}{(1+\operatorname{sen}x)\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}+\sqrt{2}\right)}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{(1+\operatorname{sen}x)\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}+\sqrt{2}\right)}\right].\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\arctan\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+1)\left(\sqrt{1+1}+\sqrt{2}\right)}\right].\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\arctan\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)}\right]$$

$$=-\frac{1}{8\sqrt{2}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\arctan\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)}\right]=-\frac{\sqrt{2}}{16}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\arctan\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)}\right].$$

Haciendo el cambio: $y=\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)$

Si $x\to\pi/2\ \Rightarrow\ y\to 0$.

$$L=-\frac{\sqrt{2}}{16}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\arctan\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{2}\right)}\right]=-\frac{\sqrt{2}}{16}\lim_{y\to 0}\frac{\arctan y}{y}=-\frac{\sqrt{2}}{16}.$$

```
In[16]:= Limit[ArcTan[Sqrt[1 + Sin[x]] - Sqrt[2]]/(1 + Cos[2 x]), x → π/2]
         límite
Out[16]= -1/(8 Sqrt[2])
```

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Figueroa, "Análisis matemático 1", 4th ed., Lima-Perú: Ediciones R.F.G., 2011, pp. 216-236.

[2] M. Mitacc y L. Toro, "Tópicos de cálculo", 3rd ed., vol. 1, Lima-Perú: Editorial Thales S.R.L., junio del 2009, pp. 325-344.

[3] R. Larson, R. P. Hostetler y B. H. Edwards, "Cálculo", 8th ed., Impreso en China: McGraw-Hill Interamericana, 2006, pp. 65-66.

[4] Wolfram Research Inc., Wolfram Mathematica ® Tutorial Collection, "Mathematics and Algorithms", 2008, pp. 78-79, 208-210.

EJERCICIOS PROPUESTOS

GRUPO 7

En los ejercicios del 1 al 24, calcular los límites.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax - \operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} x}$

R. a.

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$

R. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $\lim\limits_{n\to +\infty} n\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{n}\right)$

R. x.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\pi - 2\arccos x}{x}$

R. 2.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\pi}{x}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

R. $\dfrac{\pi^2}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{tg} x - \operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x}$

R. 1.

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$

R. $\dfrac{\pi^2}{2}$.

8. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$

R. $-\operatorname{sen} x$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{|x + \operatorname{sen}^2 x| + |\operatorname{tg} x - x|}{|\operatorname{tg} x|}\right)$

R. 1.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x}\right]$

R. 0.

11. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left[\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)\right]$

R. $\dfrac{1}{2}$.

12. $\lim\limits_{x\to +\infty} x \left[\!\left[\dfrac{x+1}{x}\right]\!\right] \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

R. 1.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax}{(1-\cos ax + x)(\sec ax)}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{x^4 \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+4} - 2\right)}{(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x)^2}\right]$

R. a.

R. 1.

15. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\operatorname{tg}(1+\cos x)}{\cos(\operatorname{tg} x)-1}$

R. -1.

16. $\lim\limits_{x\to b} \left(\dfrac{b\operatorname{sen} x - x\operatorname{sen} b}{b\cos x - x\cos b}\right)$

R. $\dfrac{\operatorname{sen} b - b\cos b}{\cos b + b\operatorname{sen} b}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a+x)\operatorname{sen}(a+2x)-\operatorname{sen}^2 a}{x}$

R. $\dfrac{3}{2}\operatorname{sen} 2a$.

18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\operatorname{tg} x$

R. 2.

19. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$

R. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{\cos x}\right)}{\tan x}$

R. $\dfrac{1}{2}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(b\operatorname{arcsen} x)}{\operatorname{sen}^2 x}$, $b>0$.

R. $\dfrac{b^2}{2}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x\operatorname{sen} x}{\arctan\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)}$

R. 3.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\operatorname{arcsen} x + \tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

R. $\dfrac{3}{2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} x - \arctan x}{x^3}$

R. $\dfrac{1}{2}$.

25. Si $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{|\operatorname{sen} x|}{|x|}, & x>0 \\ \dfrac{8-8\sqrt{\cos x}}{x^2}, & x<0 \end{cases}$, analizar la existencia de $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 0} f(x)$.

R. No existe.

26. Si $f(x)=(x^2+1)^3$, $g(x)=\cos^2 2x$, $a=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-2)-f(-2)}{h}$ y $b=\lim\limits_{x\to\pi/8}\dfrac{g(x)-g(\pi/8)}{x-\pi/8}$. Hallar $a.b$

R. 600.

27. Sean f y g dos funciones definidas por:

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\operatorname{sen}(ax^2)}{x\tan x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}\quad,\quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x+5}-2}, & x\neq -1 \\ 2, & x=-1 \end{cases}$$

Calcular $\lim\limits_{x\to -1}(fog)(x)$

R. a.

1.10. LÍMITES DE LA FORMA: $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$

Para el cálculo de estos límites, se hace uso de las siguientes ecuaciones [1–4]:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e. \quad \textbf{(1.56)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \quad \textbf{(1.57)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,\, a > 0. \quad \textbf{(1.58)}$$

Se consideran los siguientes casos:

Caso 1. Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ y son finitos, entonces: $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = A^B$.

Caso 2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces:

Si $0 < A < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = A^{\pm\infty} = \begin{cases} A^{+\infty} = 0 \\ A^{-\infty} = +\infty \end{cases}$.

Si $A > 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = A^{\pm\infty} = \begin{cases} A^{+\infty} = +\infty \\ A^{-\infty} = 0 \end{cases}$.

Caso 3. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A = 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, el procedimiento para el cálculo se muestra a continuación:

$$f(x) = 1 + \alpha(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} \left\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)g(x)} = \left\{\lim_{x\to a} [1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)g(x)}.$$

Note que $\lim\limits_{x\to a} [1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$, por la ecuación **(1.56)**.

Ejemplo 1.63. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

Solución.

Sean $f(x) = \dfrac{1+x}{2+x}$ y $g(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$, entonces:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right) = \frac{2}{3} \text{ y } \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

Esto indica que se trata el caso 1, pues los límites $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = B$, son finitos, entonces:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = (2/3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2/3}\,.$$

Haciendo uso de Wolfram Mathematica [5], se tiene:

```
In[1]:= Limit[((1 + x)/(2 + x))^((1-√x)/(1-x)), x → 1]
        límite
```

$$\text{Out[1]=}\ \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ejemplo 1.64. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Solución.

Sean $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ y $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)=1 \ \text{ y } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1.$$

Puesto que los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=B$, son finitos, entonces se trata del caso 1:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=1.$$

```
In[2]:= Limit[((x^2 - 1)/(x^2 + 1))^((x-1)/(x+1)), x → ∞]
        límite
Out[2]= 1
```

Ejemplo 1.65. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x+5}{x^2+2}\right)^{2x}$.

Solución.

$$f(x)=\frac{x^2+x+5}{x^2+2}\ \text{ y } \ g(x)=2x, \text{ entonces:}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+5}{x^2+2}\right)=1 \ \text{ y } \lim_{x\to+\infty} 2x=+\infty.$$

Como los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, entonces se trata del caso 3:

$$f(x)=1+\alpha(x)=\frac{x^2+x+5}{x^2-3}\Rightarrow \alpha(x)=\frac{x^2+x+5}{x^2-3}-1=\frac{x+8}{x^2-3}.$$

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+5}{x^2-3}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{x+8}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2-3}{x+8}}\right]^{\left(\frac{x+8}{x^2-3}\right)(2x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+8}{x^2-3}\right)(2x)}.$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+16x}{x^2-3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}\left(\frac{2+\frac{16}{x}}{1-\frac{3}{x^2}}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2+\frac{16}{x}}{1-\frac{3}{x^2}}\right)}=e^{\frac{2+0}{1-0}}=e^2.$$

```
In[3]:= Limit[((x^2 + x + 5)/(x^2 + 2))^(2 x), x → ∞]
        límite

Out[3]= e^2
```

Ejemplo 1.66. Calcular: $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{sen} x)^{\tan x}$.

Solución.

$$f(x)=\operatorname{sen} x \ \text{ y } \ g(x)=\tan x\text{, entonces:}$$

$$\lim_{x\to\pi/2}\operatorname{sen} x=1 \ \text{ y } \lim_{x\to\pi/2}\tan x=\pm\infty.$$

Los límites $\lim\limits_{x\to\pi/2}f(x)=A=1$ y $\lim\limits_{x\to\pi/2}g(x)=\pm\infty$, entonces se trata del caso 3:

$$f(x)=1+\alpha(x)=\operatorname{sen} x \ \Rightarrow \ \alpha(x)=\operatorname{sen} x-1$$

$$L=\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{sen} x)^{\tan x}=\lim_{x\to\pi/2}\left[(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x-1}}\right]^{(\operatorname{sen} x-1)(\tan x)}=e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{sen} x-1)(\tan x)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{sen} x-1)(\tan x)}=e^{-\left[\lim\limits_{x\to\pi/2}(1-\operatorname{sen} x)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\right]}=e^{-\left[\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen} x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\right]}$$

$$=e^{-\left[\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen} x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\right]}=e^{-\left[\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\right)(\operatorname{sen} x)\right]}=e^{-\left(\frac{0}{2}\right)(1)}=e^0=1.$$

```
In[4]:= Limit[(Sin[x])^Tan[x], x → π / 2]
        límite

Out[4]= 1
```

Ejemplo 1.67. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

Solución.

Se comprueba que se trata del caso 3, entonces:

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}}\right]^{\left(\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$

Aplicando la identidad trigonométrica: $\cos 2x=1-2\operatorname{sen}^2 x$, entonces el límite queda:

$$L=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1+2\operatorname{sen}^2 x}{\cos 2x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2\operatorname{sen}^2 x-(1-\cos x)}{\cos 2x}\right]\left(\frac{1}{x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos 2x}\right)\left[2\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2-\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}\right]}$$

$$=e^{(1)\left[2(1)^2-\frac{1}{2}\right]}=e^{3/2}.$$

```
In[5]:= Limit[(Cos[x]/Cos[2 x])^(1/x^2), x → 0]
        límite

Out[5]= e^(3/2)
```

Ejemplo 1.68. Calcular: $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^n\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)$.

Solución.

Haciendo el cambio de variable: $u=\dfrac{x}{\sqrt{n}}$

Si $n\to+\infty \;\Rightarrow\; u\to 0$.

$$L=\lim_{n\to+\infty}\cos^n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{u\to0}(\cos u)^{\frac{x^2}{u^2}}=\lim_{u\to0}\left[(\cos u)^{\frac{1}{\cos u-1}}\right]^{(\cos u-1)\left(\frac{x^2}{u^2}\right)}=e^{\lim\limits_{u\to0}(\cos u-1)\left(\frac{x^2}{u^2}\right)}$$

$$=e^{-x^2\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{1-\cos u}{u^2}\right)}=e^{-x^2\left(\frac{1}{2}\right)}=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

```
In[6]:= Limit[(Cos[x/Sqrt[n]])^n, n → ∞]
límite

Out[6]= e^(-x^2/2)
```

Ejemplo 1.69. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

Solución.

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2+\frac{1}{e^{-3x}}\right)}{\ln\left(3+\frac{1}{e^{-2x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2e^{-3x}+1}{e^{-3x}}\right)}{\ln\left(\frac{3e^{-2x}+1}{e^{-2x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2e^{-3x}+1)-\ln(e^{-3x})}{\ln(3e^{-2x}+1)-\ln(e^{-2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln(2e^{-3x}+1)}{x}-\frac{\ln(e^{-3x})}{x}}{\frac{\ln(3e^{-2x}+1)}{x}-\frac{\ln(e^{-2x})}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2e^{-3x}+1)^{\frac{1}{x}}-\frac{\ln(e^{-3x})}{x}}{\ln(3e^{-2x}+1)^{\frac{1}{x}}-\ln(e^{-2x})^{\frac{1}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(2e^{-3x}+1)^{\frac{1}{x}}\right]-\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(e^{-3x})}{x}\right]}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(3e^{-2x}+1)^{\frac{1}{x}}\right]-\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^{-2x})^{\frac{1}{x}}\right]}$$

$$=\frac{\ln\left[\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{-3x}+1)^{\frac{1}{x}}\right]-\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(e^{-3x})}{x}\right]}{\ln\left[\lim\limits_{x\to+\infty}(3e^{-2x}+1)^{\frac{1}{x}}\right]-\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(e^{-2x})}{x}\right]}.$$

Calculando por separado cada uno de los límites:

$$\lim_{x\to+\infty}(2e^{-3x}+1)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left[(2e^{-3x}+1)^{\frac{1}{2e^{-3x}}}\right]^{(2e^{-3x})\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{-3x})\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{(0)(0)}=1.$$

Para resolver el límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(e^{-3x})}{x}\right]$, se hace el cambio de variable: $u=e^{-3x}$.

$$x = -\frac{1}{3}\ln u.$$

Si $x \to +\infty \;\Rightarrow\; u \to 0.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(e^{-3x})}{x}\right] = \lim_{u\to+0}\left(\frac{\ln u}{-\frac{1}{3}\ln u}\right) = -3\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(3e^{-2x}+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left[(3e^{-2x}+1)^{\frac{1}{3e^{-2x}}}\right]^{(3e^{-2x})\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(3e^{-2x})\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{(0)(0)} = 1.$$

Para resolver el límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(e^{-2x})}{x}\right]$, se hace el cambio de variable: $u = e^{-2x}$.

$$x = -\frac{1}{2}\ln u.$$

Si $x \to +\infty \;\Rightarrow\; u \to 0.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(e^{-2x})}{x}\right] = \lim_{u\to+0}\left(\frac{\ln u}{-\frac{1}{2}\ln u}\right) = -2.$$

Entonces, L queda:

$$L = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})} = \frac{\ln(1)-(-3)}{\ln(1)-(-2)} = \frac{0+3}{0+2} = \frac{3}{2}.$$

```
In[7]:= Limit[Log[2 + e^(3 x)] / Log[3 + e^(2 x)], x → ∞]
        límite

Out[7]= 3/2
```

Ejemplo 1.70. Calcular: $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}$.

Solución.

Aplicando el límite tanto al numerador como denominador dentro del corchete

$$L = \lim_{x\to0}\left[\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}} = \frac{\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}}{\lim\limits_{x\to0}(1-\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}} = \frac{\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}\right]^{\operatorname{tg}x\frac{1}{\operatorname{sen}x}}}{\lim\limits_{x\to0}\left[(1+(-\operatorname{tg}x))^{-\frac{1}{\operatorname{tg}x}}\right]^{-\operatorname{tg}x\frac{1}{\operatorname{sen}x}}}$$

$$= \frac{\left[\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}\right]^{\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}x\frac{1}{\operatorname{sen}x}}}{\left[\lim\limits_{x\to0}(1+(-\operatorname{tg}x))^{-\frac{1}{\operatorname{tg}x}}\right]^{-\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}x\frac{1}{\operatorname{sen}x}}} = \frac{e^{\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}x\frac{1}{\operatorname{sen}x}}}{e^{-\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}x\frac{1}{\operatorname{sen}x}}} = \frac{e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}}}{e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}}} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2.$$

Observe que:

$$f(x) = 1 + \operatorname{tg}(x),\ \alpha(x) = \operatorname{tg}(x) \text{ y } g(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Como consecuencia se tiene que: $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = e$ y $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + (-\operatorname{tg} x)\right)^{\frac{1}{-\operatorname{tg} x}} = e$.

$$\therefore L = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = e^2.$$

In[8]:= Limit$\left[\left(\frac{1 + \text{Tan}[x]}{1 - \text{Tan}[x]}\right)^{\frac{1}{\text{Sin}[x]}}, x \to 0\right]$
límite

Out[8]= e^2

Ejemplo 1.71. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{x\ln x}$.

Solución.

Haciendo el cambio de variable: $x^x - 1 = u$.

Si $x \to 1$, entonces: $u \to 0$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{x\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{\ln x^x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\ln(u+1)} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(u+1)}{u}} = \frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\left[\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}\right]}$$

$$= \frac{1}{\ln\left[\lim\limits_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}\right]} = \frac{1}{\ln(e)} = 1.$$

In[9]:= Limit$\left[\frac{x^x - 1}{x\,\text{Log}[x]}, x \to 1\right]$
límite

Out[9]= 1

Ejemplo 1.72. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\ln(1+x)}$.

Solución.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}\right] = \left[\frac{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}\right] = \left\{\frac{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]}\right\} = \left\{\frac{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}{\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]}\right\}$$

$$= \left[\frac{2(1)}{\ln(e)}\right] = 2.$$

Realizando el cálculo con Wolfram Mathematica:

```
In[10]:= Limit[Sin[2 x]/Log[1 + x], x → 0]
         límite
Out[10]= 2
```

Ejemplo 1.73. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\operatorname{sen}\alpha x-\operatorname{sen}\beta x}$.

Solución.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\operatorname{sen}\alpha x-\operatorname{sen}\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\alpha x}-1)-(e^{\beta x}-1)}{\operatorname{sen}\alpha x-\operatorname{sen}\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(e^{\alpha x}-1)}{x}-\dfrac{(e^{\beta x}-1)}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}-\dfrac{\operatorname{sen}\beta x}{x}}$$

$$=\frac{\alpha\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{\alpha x}-1)}{\alpha x}-\beta\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{\beta x}-1)}{\beta x}}{\alpha\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha x}-\beta\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha\ln(e)-\beta\ln(e)}{\alpha(1)-\beta(1)}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}=1\,.$$

Nótese que: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{\alpha x}-1)}{\alpha x}=\ln(e)$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{\beta x}-1)}{\beta x}=\ln(e)$ (se aplica la ecuación **(1.58)**).

```
In[11]:= Limit[(e^(α x) - e^(β x))/(Sin[α x] - Sin[β x]), x → 0]
         límite
Out[11]= 1
```

Ejemplo 1.74. Calcular: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{\ln(x^n)-\ln(a^n)}$.

Solución.

$$L=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{\ln(x^n)-\ln(a^n)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots\cdots+a^{n-1})}{n[\ln(x)-\ln(a)]}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{[\ln(x)-\ln(a)]}}_{L_1}\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots\cdots+a^{n-1})}{n}}_{L_2}=L_1L_2.$$

Si $x\to a$, entonces $y\to 0$.

Para el cálculo de $L_1=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)}{[\ln(x)-\ln(a)]}$, se hace el cambio de variable: $y=x-a$.

$$\Rightarrow L_1=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{[\ln(x)-\ln(a)]}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{[\ln(y+a)-\ln(a)]}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\left[\ln\left(\frac{y+a}{a}\right)\right]}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\left[\ln\left(\frac{y}{a}+1\right)\right]}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{a}{\frac{a}{y}\left[\ln\left(\frac{y}{a}+1\right)\right]}=\frac{a}{\lim\limits_{y\to 0}\left[\ln\left(\frac{y}{a}+1\right)\right]^{\frac{a}{y}}}=\frac{a}{\ln\left\{\lim\limits_{y\to 0}\left[\left(\frac{y}{a}+1\right)\right]^{\frac{a}{y}}\right\}}=\frac{a}{\ln(e)}=a.$$

$$L_2=\lim_{x\to a}\frac{(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots\cdots+a^{n-1})}{n}=\frac{(a^{n-1}+aa^{n-2}+a^2a^{n-3}+\cdots\cdots+a^{n-1})}{n}$$

$$=\frac{(a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots\cdots+a^{n-1})}{n}$$

$$=\frac{na^{n-1}}{n}=a^{n-1}.$$

$$\Rightarrow\ L=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{\ln(x^n)-\ln(a^n)}=aa^{n-1}=a^n.$$

Nótese que: $\lim\limits_{y\to 0}\left[\left(\frac{y}{a}+1\right)\right]^{\frac{a}{y}}=e$ (se aplica la ecuación **(1.56)**).

```
In[12]:= Limit[(x^n - a^n)/(Log[x^n] - Log[a^n]), x → a]
         límite

Out[12]= a^n
```

Ejemplo 1.75. Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^x$.

Solución.

Haciendo el cambio de variable: $y=\frac{1}{x}$.

Si $x\to\infty$, entonces $y\to 0$.

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^x=\lim_{y\to 0}\,[\operatorname{sen}y+\cos y]^{1/y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[(\operatorname{sen}y+\cos y)^{\frac{1}{(\operatorname{sen}y+\cos y-1)}}\right]^{(\operatorname{sen}y+\cos y-1)/y}$$

$$=e^{\lim\limits_{y\to 0}(\operatorname{sen}y+\cos y-1)/y}=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}y}{y}-\lim\limits_{y\to 0}\frac{(1-\cos y)}{y}}=e^{1-0}=e.$$

Para la resolución de este ejemplo, se tuvo en cuenta el caso 3, donde:

$f(y)=\operatorname{sen}y+\cos y,\ \alpha(y)=\operatorname{sen}y+\cos y-1$ y $g(y)=\frac{1}{y}$.

$$\therefore\ \lim_{y\to 0}\left[(\operatorname{sen}y+\cos y)^{\frac{1}{(\operatorname{sen}y+\cos y-1)}}\right]=e.$$

```
In[13]:= Limit[(Sin[1/x] + Cos[1/x])^x, x → +∞]
         límite

Out[13]= e
```

Ejemplo 1.76. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{m/x}$.

Solución.

$$L=\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{m/x}=\lim_{x\to 0}\left[(e^x+x)^{\frac{1}{e^x+x-1}}\right]^{(e^x+x-1)\left(\frac{m}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x-1)\left(\frac{m}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}[(e^x-1)+x]\left(\frac{m}{x}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}[(e^x-1)+x]\left(\frac{m}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{e^x-1}{x}\right)+1\right]m}=e^{(1+1)m}=e^{2m}.$$

```
In[14]:= Limit[(e^x + x)^(m/x), x → 0]
         límite
Out[14]= e^(2 m)
```

Ejemplo 1.77. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)}$.

Solución.

$$L=\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)}=\lim_{x\to 1}\left[(2-x)^{\frac{1}{1-x}}\right]^{(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)}.$$

Calculando por separado el límite $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\left[\tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right]$

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)=\lim_{x\to 1}(1-x)\cot\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to 1}(1-x)\cot\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{2x}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]}=-\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x}{\pi}\right)\left\{\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)}\right\}^{-1}$$

$$=-\left(\frac{2}{\pi}\right)(1)^{-1}=-\frac{2}{\pi}.$$

Observe que $\lim\limits_{x\to 1}\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]=1$ y $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)}=1$.

Entonces, el límite propuesto queda:

$$L=\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

```
In[15]:= Limit[(2 - x)^Tan[π/(2 x)], x → 1]
         límite
Out[15]= e^(-2/π)
```

Ejemplo 1.78. Calcular: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

Solución.

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^2}\ln(\cos ax)}{\frac{1}{x^2}\ln(\cos bx)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}}{\ln(\cos bx)^{\frac{1}{x^2}}}=\frac{\ln\left[\lim\limits_{x\to0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}\right]}{\ln\left[\lim\limits_{x\to0}(\cos bx)^{\frac{1}{x^2}}\right]}.$$

Calculando los límites $\lim\limits_{x\to0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$ y $\lim\limits_{x\to0}(\cos bx)^{\frac{1}{x^2}}$ por separado

$$\lim_{x\to0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left[(\cos ax)^{\frac{1}{\cos ax-1}}\right]^{(\cos ax-1)\left(\frac{1}{x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}(\cos ax-1)\left(\frac{1}{x^2}\right)}=e^{-a^2\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1-\cos ax}{(ax)^2}\right]}=e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

$$\lim_{x\to0}(\cos bx)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left[(\cos bx)^{\frac{1}{\cos bx-1}}\right]^{(\cos bx-1)\left(\frac{1}{x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}(\cos bx-1)\left(\frac{1}{x^2}\right)}=e^{-b^2\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1-\cos bx}{(bx)^2}\right]}=e^{-\frac{b^2}{2}}.$$

Entonces L, queda:

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}=\frac{\ln\left(e^{-\frac{a^2}{2}}\right)}{\ln\left(e^{-\frac{b^2}{2}}\right)}=\frac{-\frac{a^2}{2}}{-\frac{b^2}{2}}=\frac{a^2}{b^2}.$$

```
In[16]:= Limit[Log[Cos[a x]] / Log[Cos[b x]], x → 0]
         límite
Out[16]= a^2/b^2
```

Ejemplo 1.79. Calcular: $\lim\limits_{n\to+\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

Solución.

$$L=\lim_{n\to+\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\right]^n=\lim_{n\to+\infty}\left\{\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)-1}}\right\}^{n\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)-1\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)-1\right]}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[\frac{1+\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\tan\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right]}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[\frac{2\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\tan\left(\frac{1}{n}\right)}\right]}.$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u=\frac{1}{n}\Rightarrow n=\frac{1}{u}.$$

Si $n\to+\infty\Rightarrow u\to0$, entonces:

$$L=e^{\lim\limits_{u\to0}\frac{1}{u}\left(\frac{2\tan u}{1-\tan u}\right)}=e^{2\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{1}{1-\tan u}\right)\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{\tan u}{u}\right)}=e^{2(1)(1)}=e^2.$$

```
In[17]:= Limit[(Tan[π/4 + 1/n])^n, n → +∞]
         límite

Out[17]= e^2
```

Ejemplo 1.80. Calcular: $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^{x}}{h^2}\right)$, $a>0$.

Solución.

Factorizando el término a^x:

$$L=\lim_{h\to 0}\left(\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^{x}}{h^2}\right)=\lim_{h\to 0}a^x\left(\frac{a^{h}+a^{-h}-2}{h^2}\right)=\lim_{h\to 0}a^x\left(\frac{a^{2h}-2a^{h}+1}{h^2a^h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}a^x\left(\frac{a^{2h}-2a^{h}+1}{h^2a^h}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{a^x}{a^h}\left(\frac{a^{2h}-2a^{h}+1}{h^2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{a^x}{a^h}\left(\frac{a^{h}-1}{h}\right)^2$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{a^h}\right)\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{a^{h}-1}{h}\right)\right]^2=a^x\ln^2 a\,.$$

Observe que: $a^{2h}-2a^h+1=(a^h-1)^2$.

```
In[18]:= Limit[(a^(x+h) + a^(x-h) - 2 a^x)/h^2, h → 0]
         límite

Out[18]= a^x Log[a]^2
```

Ejemplo 1.81. Calcular: $\lim\limits_{x\to b}\left(\dfrac{a^{x}-a^{b}}{x-b}\right)$, $a>0$.

Solución.

Haciendo el cambio de variable: $u=x-b\ \Rightarrow x=u+b$.

Si $x\to b\ \Rightarrow u\ \to 0$, entonces:

$$L=\lim_{x\to b}\left(\frac{a^{x}-a^{b}}{x-b}\right)=\lim_{u\to 0}\left(\frac{a^{u+b}-a^{b}}{u}\right)=\lim_{u\to 0}a^b\left(\frac{a^{u}-1}{u}\right)=a^b\lim_{u\to 0}\left(\frac{a^{u}-1}{u}\right)=a^b\ln a\,.$$

```
In[19]:= Limit[(a^x - a^b)/(x - b), x → b]
         límite

Out[19]= a^b Log[a]
```

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Figueroa, "Análisis matemático 1", 4th ed., Lima-Perú: Ediciones R.F.G., 2011, pp. 296-306.

[2] M. Mitacc y L. Toro, "Tópicos de cálculo", 3rd ed., vol. 1, Lima-Perú: Editorial Thales S.R.L., junio del 2009, pp. 368-378.

[3] E. Espinoza, "Análisis Matemático I", 2nd ed., Lima-Perú, 1998, pp. 413-423.

[4] M. Lázaro, "Límites y Continuidad", 2nd ed., Lima-Perú: Editorial Moshera, abril del 2009, pp. 138-144.

[5] Wolfram Research Inc., Wolfram Mathematica ® Tutorial Collection, "Mathematics and Algorithms", 2008, pp. 78-79, 208-210.

EJERCICIOS PROPUESTOS

GRUPO 8

En los ejercicios del 1 al 32, calcular los límites.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{sen} 3x)^{\frac{1}{2x}}$

R. $e^{-3/2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + a\operatorname{sen} bx)^{\frac{1}{x}}$

R. e^{ab}.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$

R. 1.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}\right)$

R. $\alpha-\beta$.

5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\cos\left(\sqrt{\dfrac{5a}{x}}\right)\right]^{bx}$

R. $e^{-\frac{5ab}{2}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(e^x+x)^{\tan x}}{(1+\operatorname{sen} x)^x}\right]^{\frac{\cot x}{x}}$

R. e.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}$

R. a.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{\ln(x+1)}$

R. a.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{\arctan 2x}{x-\operatorname{sen} x}}$

R. e^{-2}.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}\right)$

R. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec(\pi x/2)}$

R. $e^{2/\pi}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\cot x}$

R. e^{-2}.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} 3x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 3x}}$

14. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x}+1-\sqrt{x+1}\right)^{\sqrt{x}}$

R. $e^{\frac{2}{\operatorname{sen} a}}$.

R. $e^{-1/2}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x}{\ln(x+1)}$

R. 2.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(xe^{x}) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$

R. -2.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{1/x}$

R. $(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{1/x}$, $a>0, b>0$.

R. $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

19. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$.

R. $\dfrac{3}{2}$.

20. $\lim\limits_{n\to \infty} n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+h]{x}\right)$, $x>0$.

R. $n\ln x$.

21. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^4+3x^2+2x+1}{2x^4+5x+4}\right)^{\sqrt{x^2-4x}}$

R. 0.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt[3]{1+\operatorname{sen} 3x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}(\sqrt{3x})}}$

R. 1.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)\right]}{\operatorname{sen} bx}$.

R. $\dfrac{2a}{b}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen} \pi x^a}{\operatorname{sen} \pi x^b}$.

R. $\dfrac{a}{b}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left[\sqrt[5]{\cos(ax)}\right]}{bx^2}$

R. $-\dfrac{a^2}{10b}$.

26. $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\dfrac{4}{\sqrt{16x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4x}\right)}}\right]^{x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3x}\right)}$

R. $\sqrt[3]{2}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \left[1+6\tan^2\left(\sqrt{2x}\right)\right]^{\frac{1}{4x}}$

R. e^3.

28. $\lim\limits_{x\to 1} \left[2+\cos(\pi x)\right]^{\frac{1}{x^2-1}}$

R. 1.

29. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt[x]{1-\operatorname{sen}\sqrt{x}}\right)$

R. 0.

30. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1-\cos^2 x}{x}}$

R. 1.

31. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3+5x^2+6x+1}{4x^3+5x+1}\right)^{\frac{\sqrt{x^2-4x}}{3x}}$

R. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\tan x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}(\sqrt{2x})}}$

R. 1.

CAPÍTULO II

CONTINUIDAD

2.1. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Definición 2.1. Considere una función real de variable real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que la función f es continua en el punto $x = a$, si y sólo si cumple con las siguientes condiciones [1–5]:

$$\text{Exista } f(a), \text{ es decir } a \in \mathrm{Dom}(f). \tag{2.1}$$

$$\text{Exista } \lim_{x\to a} f(x). \tag{2.2}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{2.3}$$

2.1.1. TIPOS DE DISCONTINUIDAD EN UN PUNTO

Definición 2.2. Se dice que una función real de variable real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene **discontinuidad evitable o removible** en un punto $x = a$, si se cumple alguno de los siguientes casos [1–3]:

Caso 1: $a \in \mathrm{Dom}(f)$ y existe $\lim_{x\to a} f(x)$, pero $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

$$f_r(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathrm{Dom}(f) \\ \lim_{x\to a} f(x), & x = a \end{cases}, \quad \mathrm{Dom}(f_r) = \mathrm{Dom}(f)$$

Caso 2: $a \notin \mathrm{Dom}(f)$ y existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

$$f_r(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (\mathrm{Dom}(f) - \{a\}) \\ \lim_{x\to a} f(x), & x = a \end{cases}, \quad \mathrm{Dom}(f_r) = \mathrm{Dom}(f) \cup \{a\}$$

En estos casos se ha designado a $f_r(x)$ como la función redefinida de $f(x)$.

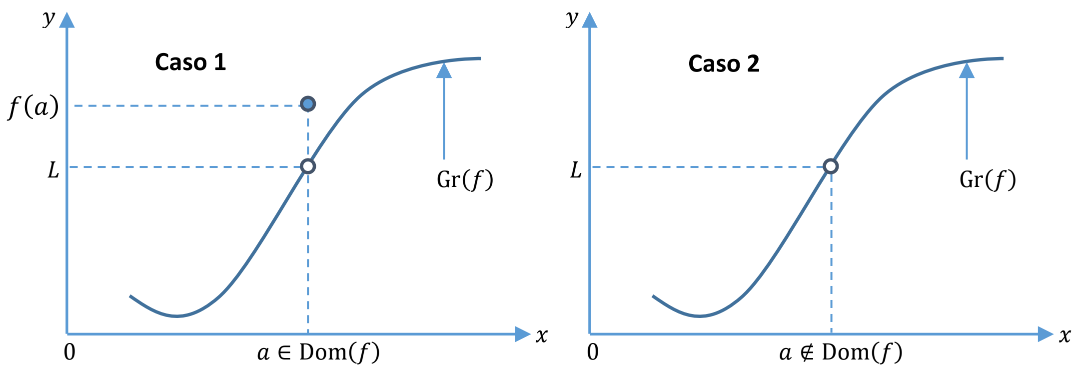


Figura 2.1. Discontinuidad evitable o removible [1–3].

Definición 2.3. Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un punto de **discontinuidad esencial o inevitable** de la función f, si se cumple alguno de los siguientes casos [1–3]:

Caso 1: $a \in \mathrm{Dom}(f)$ y no existe $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen, pero son diferentes.

Caso 2: $a \in \mathrm{Dom}(f)$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

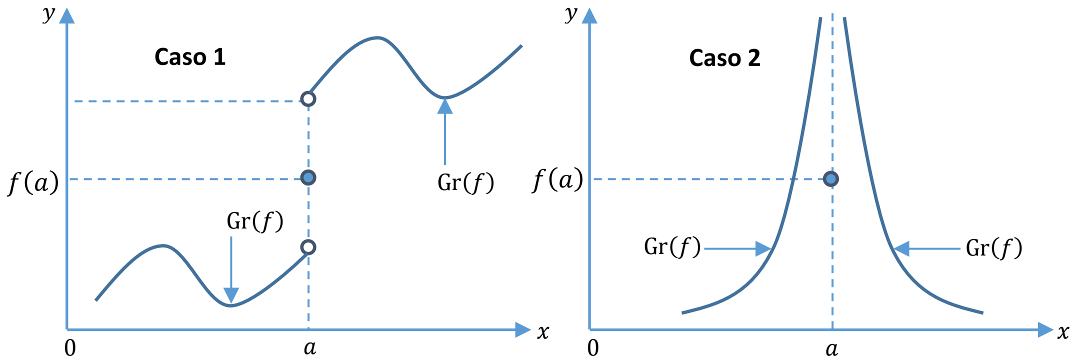


Figura 2.2. Discontinuidad inevitable [1–3].

Ejemplo 2.1. Sea: $f(x) = \begin{cases} 3 - x\operatorname{sgn}(x+3), & x < -2 \\ 2 - x, & -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4x + 4, & x > 2 \end{cases}$. Determinar si la función es continua o discontinua en $x = -2$ y $x = 2$.

Solución.

$$\operatorname{sgn}(x+3) = \begin{cases} -1, & x < -3 \\ 0, & x = -3 \\ 1, & x > -3 \end{cases}$$

Una forma más explícita de representar la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -3 \\ 3, & x = -3 \\ 3 - x, & -3 < x < -2 \\ 2 - x, & -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4x + 4, & x > 2 \end{cases}$$

• *Analizando la continuidad en* $x = -2$

$f(-2) = 2 - (-2) = 4 \Rightarrow \exists f(-2)$.

Evaluando $\lim_{x\to -2} f(x)$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (3 - x) = 5$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (2 - x) = 4$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim_{x\to -2^+} f(x) \therefore \nexists \lim_{x\to -2} f(x).$$

No se cumple la segunda condición de continuidad, por lo tanto f no es continua en $x = -2$.

Se puede decir que f tiene una discontinuidad esencial en $x = -2$ (caso 1).

• *Analizando la continuidad en* $x = 2$

$f(2) = 2 - (2) = 0 \Rightarrow \exists f(2)$.

Evaluando $\lim_{x \to 2} f(x)$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2 - x) = 0.$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 4x + 4) = 0.$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \therefore \exists \lim_{x \to 2} f(x).$$

$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$. Por lo tanto f es continua en $x = 2$.

La representación gráfica de f se muestra en la figura 2.3.

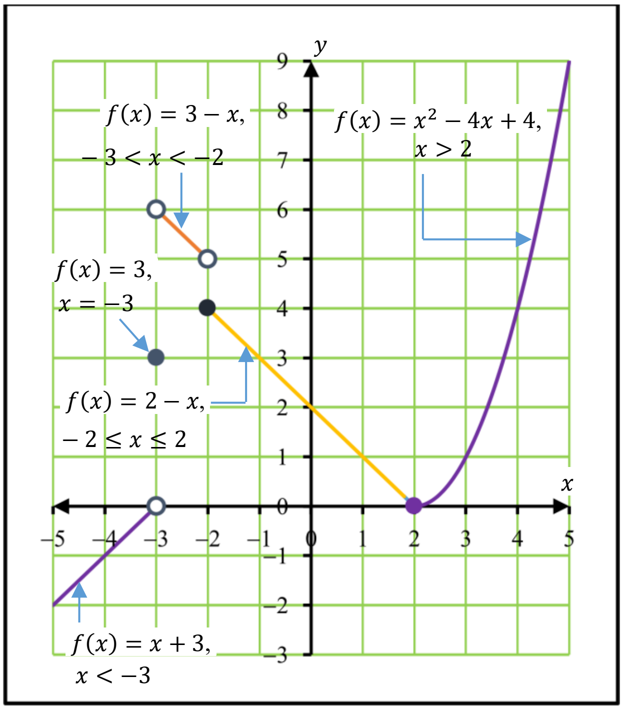


Figura 2.3. Representación gráfica de: $f(x) = \begin{cases} 3 - x\operatorname{sgn}(x+3), & x < -2 \\ 2 - x, & -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 4, & x > 2 \end{cases}$, en el ejemplo 2.1.

Ejemplo 2.2. Sea: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|}{|x|-2}, & x\neq 2\\ 1, & x=2\end{cases}$. Determinar los puntos de continuidad y discontinuidad

Solución.

Una forma más explícita de representar la función es:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+2}, & -\infty<x<-2\ \vee -2<x<0\\ -1, & 0\leq x<2\\ 1, & x\geq 2\end{cases}$$

Los posibles puntos de discontinuidad son: $x=-2$, $x=0$ y $x=2$.

• *Analizando la continuidad en* $x=-2$

No existe $f(-2)$.

Evaluando $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x-2}{x+2}=\frac{-2-2}{-2^-+2}=\frac{-4}{0^-}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{x-2}{x+2}=\frac{-2-2}{-2^++2}=\frac{-4}{0^+}=-\infty.$$

Entonces la función presenta una discontinuidad esencial en $x=-2$ (caso 2).

• *Analizando la continuidad en* $x=0$

$f(0)=-1\Rightarrow \exists f(0)$.

Evaluando $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-2}{x+2}=-1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(-1)=-1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\therefore \exists \lim_{x\to 0} f(x).$$

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Por lo tanto f es continua en $x=0$.

• *Analizando la continuidad en* $x=2$

$f(2)=1\Rightarrow \exists f(2)$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(-1)=-1.$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(1)=1.$$

Los límites laterales son finitos y diferentes, esto quiere decir que la función tiene una discontinuidad esencial en $x=2$ (caso 1).

La gráfica de la función, se muestra en la figura 2.4.

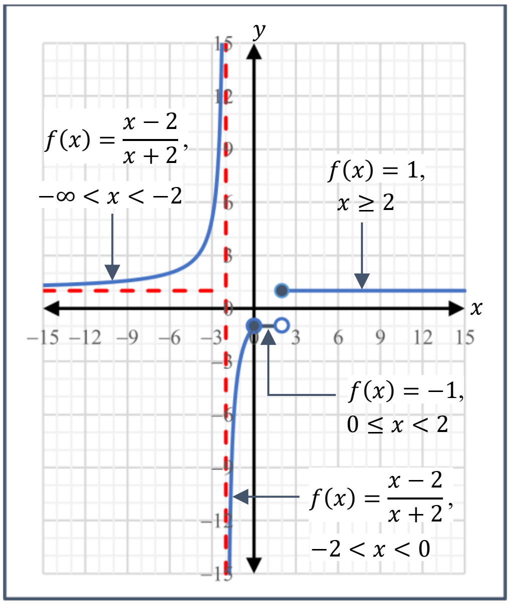


Figura 2.4. Representación gráfica de: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-2|}{|x|-2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$, en el ejemplo 2.2.

Ejemplo 2.3. Para la función: $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-11x+12}{x^2-5x+4}$. Determinar los puntos de continuidad y discontinuidad. Además, defina una función f_r, de manera que sea continua $\forall x$.

Solución.

La función simplificada es: $f(x) = \dfrac{(x-4)(x-1)(x+3)}{(x-4)(x-1)} = x+3, \;\; x \neq 1 \wedge x \neq 4.$

La función tiene puntos de discontinuidad evitable o removible en $x = 1$ y $x = 4$ (caso 2).

Evaluando $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+3) = (1+3) = 4\,.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+3) = (1+3) = 4\,.$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}(x+3) = (4+3) = 7\,.$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}(x+3) = (4+3) = 7.$$

Entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ existen.

La función f_r queda definida por: $f_r(x) = \begin{cases} x+3, & x \in (\mathbb{R} - \{1, 4\}) \\ 4, & x = 1 \\ 7, & x = 4 \end{cases}$.

Ejemplo 2.4. Hallar los valores de a y b que posibiliten la continuidad en todo su dominio de la función definida por: $f(x)=\begin{cases} b[\![3x+4]\!], & x\in[1,2\rangle \\ 20, & x=2 \\ 5x\sqrt{a-2x}, & x\in\langle 2,3] \end{cases}$.

Solución.

- *Analizando la continuidad en* $x=2$

$$x\to 2^- \Rightarrow x<2 \Rightarrow 3x<6 \Rightarrow 3x+4<10 \Rightarrow 9<3x+4<10 \Rightarrow [\![3x+4]\!]=9$$

$$f(2)=20.$$

Evaluando $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} b[\![3x+4]\!]=9b.$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 5x\sqrt{a-2x}=10\sqrt{a-4}.$$

Como la función es continua en todo su dominio, entonces: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$.

$$9b=20\Rightarrow b=\frac{20}{9}.$$

Igualando $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$:

$$10\sqrt{a-4}=20\Rightarrow \sqrt{a-4}=2\Rightarrow a-4=4\Rightarrow a=8.$$

Entonces, la función queda: $f(x)=\begin{cases} 20, & x\in[1,2] \\ 5x\sqrt{8-2x}, & x\in\langle 2,3] \end{cases}$.

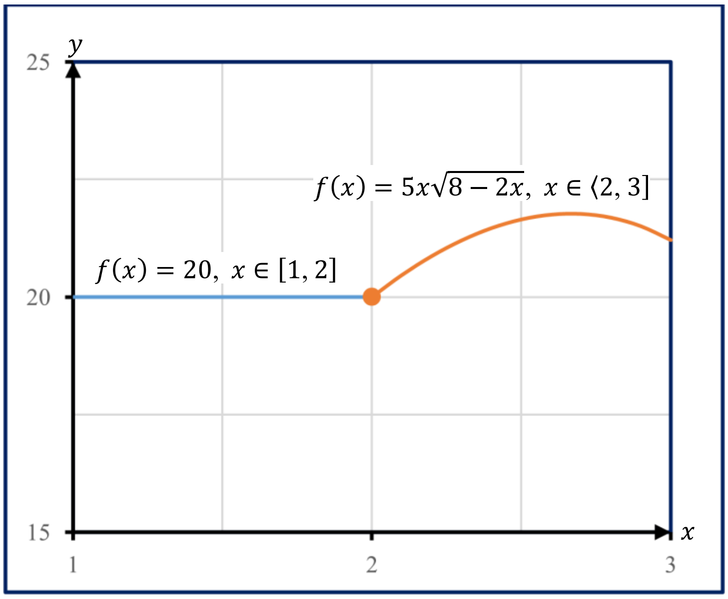


Figura 2.5. Representación gráfica de: $f(x)=\begin{cases} 20, & x\in[1,2] \\ 5x\sqrt{8-2x}, & x\in\langle 2,3] \end{cases}$, en el ejemplo 2.4.

Ejemplo 2.5. El precio por kilo de un determinado producto viene dado, en función del número de kilos que se venden por la función:

$$f(x)=\begin{cases} ax+20, & \text{si } x\le 10 \\ \dfrac{3x}{x-10}-\dfrac{6x}{x^2-18x+80}, & \text{si } x>10 \end{cases}.$$

Halle el valor de a para que no exista una cantidad crítica de compra (donde el precio del kilo no sufra un salto brusco).

Solución.

Para que el precio no sufra un salto brusco, la función debe ser continua en todo su dominio, entonces:

$$\lim_{x\to 10} f(x)=f(10). \qquad \textbf{(E1-2.5)}$$

$$f(10)=10a+20. \qquad \textbf{(E2-2.5)}$$

Calculando $\lim\limits_{x\to 10} f(x)$, se tiene:

$$\lim_{x\to 10} f(x)=\lim_{x\to 10}\left(\frac{3x}{x-10}-\frac{6x}{x^2-18x+80}\right)$$

$$=\lim_{x\to 10}\left[\frac{3x}{x-10}-\frac{6x}{(x-10)(x-8)}\right]=\lim_{x\to 10}\frac{3x}{x-10}\left[1-\frac{2}{(x-8)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{3x}{(x-10)}\frac{(x-10)}{(x-8)}=\lim_{x\to 10}\frac{3x}{(x-8)}=\frac{30}{2}=15.$$

Igualando $\lim\limits_{x\to 10} f(x)=f(10)$, se tiene:

$$f(10)=10a+20=15 \;\Rightarrow\; 10a=-5 \;\Rightarrow\; a=-1/2.$$

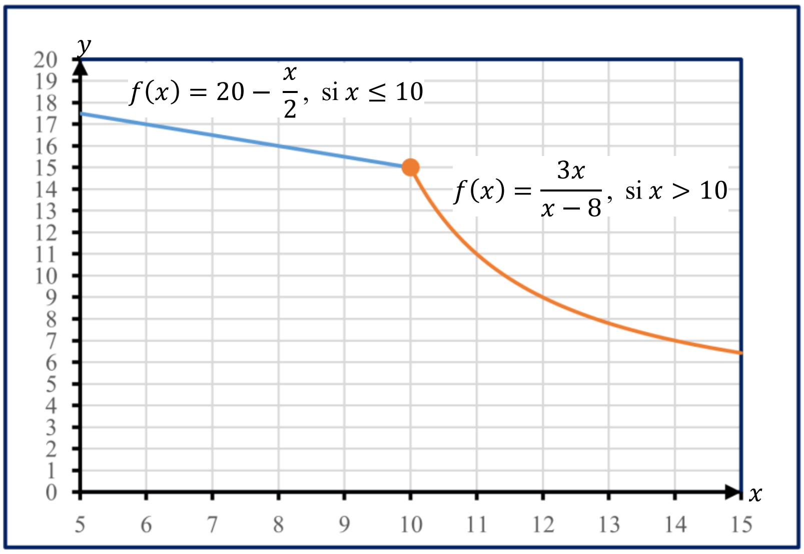


Figura 2.6. Representación gráfica de: $f(x)=\begin{cases} 20-(x/2), & \text{si } x\le 10 \\ 3x/(x-8), & \text{si } x>10 \end{cases}$, en el ejemplo 2.5.

Ejemplo 2.6. Hallar el valor de a que posibilite la continuidad en todo su dominio de la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} a, & \text{si } x=0 \\ \dfrac{\sqrt{\cos 2x}-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}, & \text{si } x\neq 0 \end{cases}.$$

Solución.

Si la función es continua en todo su dominio, entonces:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0). \qquad \textbf{(E1-2.6)}$$

$$f(0)=a. \qquad \textbf{(E2-2.6)}$$

Evaluando el límite $\lim_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x}-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x\,(\cos 2x+\cos^2 x)}$$

Recuerde la identidad: $\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x\,(\cos 2x+\cos^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(\cos 2x+\cos^2 x)}=-\frac{1}{2}.$$

Entonces, de la igualación $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, se obtiene $a=-1/2$.

Ejemplo 2.7. Determinar el valor de $a\in\langle 0,\pi/2\rangle$ para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 a}{x^2-a^2}, & x=a \\ \dfrac{1}{2a}, & x=a \end{cases}, \text{ sea continua en todo su dominio.}$$

Solución.

Las condiciones de continuidad para la función, son:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a). \qquad \textbf{(E1-2.7)}$$

$$f(a)=\frac{1}{2a}. \qquad \textbf{(E2-2.7)}$$

Calculando el límite $\lim_{x\to a} f(x)$, se tiene:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 a}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{(\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a)(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} a)}{(x-a)(x+a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a)(2\operatorname{sen} a)}{(x-a)(2a)}.$$

Haciendo el cambio de variable: $u=x-a$.

Si $x\to a \Rightarrow u\to 0$, entonces el límite queda:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} a}{a}\right)\lim_{u\to 0}\frac{[\operatorname{sen}(u+a)-\operatorname{sen} a]}{u} = \left(\frac{\operatorname{sen} a}{a}\right)\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u\cos a+\operatorname{sen} a\cos u-\operatorname{sen} a}{u}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen} a}{a}\right)\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u\cos a-\operatorname{sen} a\,(1-\cos u)}{u}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen} a\cos a}{a}\right)\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u}-\left(\frac{\operatorname{sen}^2 a}{a}\right)\lim_{u\to 0}\frac{(1-\cos u)}{u}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen} a\cos a}{a}\right)(1)-\left(\frac{\operatorname{sen}^2 a}{a}\right)(0) = \frac{\operatorname{sen} a\cos a}{a}.$$

Entonces:

$$f(a) = \frac{1}{2a} = \frac{\operatorname{sen} a\cos a}{a} \;\Rightarrow\; 1 = 2\operatorname{sen} a\cos a \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} 2a = 1 \;\Rightarrow\; 2a = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; a = \frac{\pi}{4}.$$

Ejemplo 2.8. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} 3a-\dfrac{2a^2}{x^2}, & 0<x<a \\ \dfrac{(x-2a)^2}{a}, & x\geq a \end{cases}$. Calcular el valor de a para que la función sea continua en todo su dominio y graficar la función.

Solución.

Para que la función sea continua en todo su dominio, se debe de cumplir lo siguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \qquad \textbf{(E1-2.8)}$$

$$f(a) = \frac{(a-2a)^2}{a} = \frac{(-a)^2}{a} = a. \qquad \textbf{(E2-2.8)}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(3a-\frac{2a^2}{x^2}\right) = 3a-\frac{2a^2}{a^2} = 3a-2.$$

Igualando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, se tiene: $3a-2=a \;\Rightarrow\; a=1$. Entonces, la función queda como se muestra en la figura 2.7.

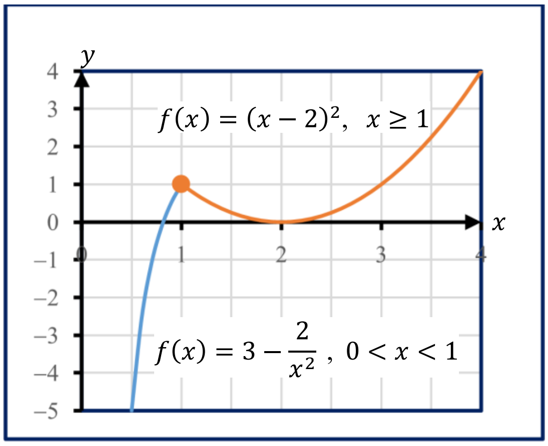


Figura 2.7. Representación gráfica de: $f(x) = \begin{cases} 3-(2/x^2), & 0<x<1 \\ (x-2)^2, & x\geq 1 \end{cases}$, en el ejemplo 2.8.

2.2. CONTINUIDAD DE FUNCIONES EN INTERVALOS

2.2.1. DEFINICIONES IMPORTANTES DE CONTINUIDAD EN INTERVALOS

Definición 2.4. Una función $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ es continua en $\langle a, b\rangle$ si es continua para todo $x \in \langle a, b\rangle$ [1–3].

Definición 2.5. Una función f es continua en $\langle a, b]$ si [1–3]:

a) f es continua en $\langle a, b\rangle$

b) f es continua por la izquierda en b, es decir: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

Definición 2.6. Una función f es continua en $[a, b\rangle$ si [1–3]:

a) f es continua en $\langle a, b\rangle$

b) f es continua por la derecha en a, es decir: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Definición 2.7. Una función f es continua en $[a, b]$ si [1–3]:

a) f es continua en $\langle a, b\rangle$

b) f es continua por la derecha en a, es decir: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

c) f es continua por la izquierda en b, es decir: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

Ejemplo 2.9. Dada la función definida por: $f(x) = \sqrt{|x| - [\![x]\!]}$. Analizar la continuidad en el intervalo $[1, 3]$.

Solución.

La función restringida al intervalo $[1, 3]$ es:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & 1 \le x < 2 \\ \sqrt{x-2}, & 2 \le x < 3 \\ \sqrt{x-3}, & x = 3 \end{cases}.$$

Se observa que los puntos donde se debe estudiar la continuidad son: $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

• *Analizando la continuidad en $x = 1$*

$$f(1) = \sqrt{1-1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{1-1} = 0.$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, f es continua en $x = 1$ por la derecha.

• *Analizando la continuidad en $x = 2$*

$$f(2) = \sqrt{2-2} = 0.$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{2-1} = 1\,.$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{2-2} = 0\,.$$

Los límites laterales son diferentes, entonces f es discontinua en $x = 2$ por la izquierda, pero es continua en $x = 2$ por la derecha porque $f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$, a la vez que es continua por la derecha en $x = 1$. Esto indica que la función f es continua en el intervalo $[1, 2\rangle$.

• *Analizando la continuidad en* $x = 3$

$$f(3) = \sqrt{3-3} = 0.$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{x-2} = 1.$$

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq f(3)$, f es discontinua en $x = 3$ por la izquierda. La función f es continua en $x = 3$ por la derecha y discontinua en $x = 3$ por la izquierda, se puede decir que f es continua en el intervalo $[2, 3\rangle$.

Entonces, f es continua en los siguientes intervalos: $[1, 2\rangle$ y $[2, 3\rangle$.

Se concluye que f no es continua en el intervalo $[1, 3]$, por lo siguiente:

- No es continua para todo $x \in \langle 1, 3\rangle$, es decir es discontinua en $x = 2$ por la izquierda.
- No es continua en $x = 3$ por la izquierda, es decir: $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq f(3)$.

La gráfica de la función, se muestra en la figura 2.8.

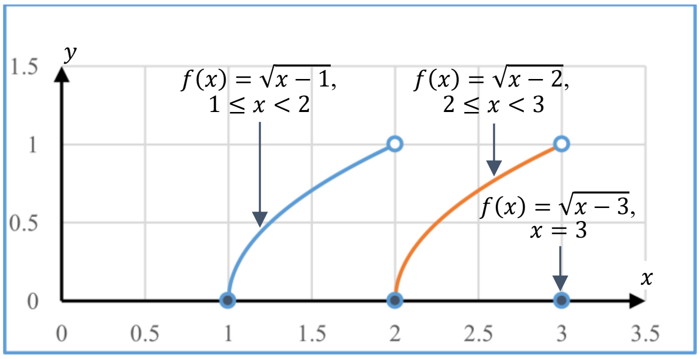


Figura 2.8. Representación gráfica de: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & 1 \le x < 2 \\ \sqrt{x-2}, & 2 \le x < 3 \\ \sqrt{x-3}, & x = 3 \end{cases}$, en el ejemplo 2.9.

Ejemplo 2.10. Dada la función definida por: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{25-x^2}{x^2-9}}, & 3 < |x| \le 5 \\ \dfrac{\operatorname{sgn}(x^2-16)}{\sqrt{|x| - [\![\frac{x}{3}]\!]}}, & |x| \le 3 \\ \sqrt[4]{\dfrac{x^2-25}{|2-x|}}, & |x| > 5 \end{cases}$. Determinar los intervalos donde f es continua.

Solución.

Analizando los valores que puede tomar, $\operatorname{sgn}(x^2 - 16)$ y $[\![x/3]\!]$, se puede expresar la función de una forma más explícita.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{25 - x^2}{x^2 - 9}}, & x \in ([-5, -3\rangle \cup \langle 3, 5]) \\ \dfrac{-1}{\sqrt{-x+1}}, & x \in [-3, 0\rangle \\ \dfrac{-1}{\sqrt{x}}, & x \in \langle 0, 3\rangle \\ \dfrac{-1}{\sqrt{x-1}}, & x = 3 \\ \sqrt[4]{\dfrac{x^2 - 25}{2 - x}}, & x \in \langle -\infty, -5\rangle \\ \sqrt[4]{\dfrac{x^2 - 25}{x - 2}}, & x \in \langle 5, +\infty\rangle \end{cases}.$$

Se observa que los puntos donde se debe estudiar la continuidad son:

$x = -5,\ x = -3,\ x = 0,\ x = 3$ y $x = 5.$

• *Analizando la continuidad en* $x = -5$

$$f(-5) = \sqrt{\frac{25 - (-5)^2}{(-5)^2 - 9}} = \sqrt{\frac{25 - 25}{16}} = 0.$$

Evaluando $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$

$$\lim_{x \to -5^-} f(x) = \lim_{x \to -5^-} \sqrt[4]{\frac{x^2 - 25}{2 - x}} = 0.$$

$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = \lim_{x \to -5^+} \sqrt{\frac{25 - x^2}{x^2 - 9}} = 0.$$

Como $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -5^+} f(x)$, entonces existe $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$. Además $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = f(-5)$. Esto indica que la función es continua en $x = -5$ y por ende es continua en el intervalo $\langle -\infty, -5]$.

• *Analizando la continuidad en* $x = -3$

$$f(-3) = \frac{-1}{\sqrt{3+1}} = -\frac{1}{2}.$$

Evaluando $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \sqrt{\frac{25 - x^2}{x^2 - 9}} = \sqrt{\frac{25 - (-3)^2}{(-3^-)^2 - 9}} = \sqrt{\frac{16}{9^+ - 9}} = \sqrt{\frac{16}{0^+}} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{-1}{\sqrt{-x+1}} = \frac{-1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Los límites laterales son diferentes, entonces f es discontinua en $x = -3$ por la izquierda, pero es continua en $x = -3$ por la derecha porque $f(-3) = \lim_{x\to -3^+} f(x)$, a la vez que es continua en $x = -5$. Esto indica que la función f es continua en el intervalo $\langle -\infty, -3\rangle$.

• *Analizando la continuidad en* $x = 0$

No existe $f(0)$, entonces la función f no es continua en $x = 0$.

Como la función f es continua en $x = -3$ por la derecha, entonces, será continua en el intervalo $[-3, 0\rangle$.

• *Analizando la continuidad en* $x = 3$

$$f(3) = \frac{-1}{\sqrt{3-1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{\frac{25 - x^2}{x^2 - 9}} = \sqrt{\frac{25 - (3)^2}{(3^+)^2 - 9}} = \sqrt{\frac{16}{9^+ - 9}} = \sqrt{\frac{16}{0^+}} = +\infty.$$

Por ser un límite lateral $+\infty$, la función presenta una discontinuidad esencial en $x = 3$ (caso 2).

Entonces, la función es continua en el intervalo $\langle 0, 3\rangle$.

• *Analizando la continuidad en* $x = 5$

$$f(5) = \sqrt{\frac{25 - (5)^2}{(5)^2 - 9}} = 0.$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \sqrt{\frac{25 - x^2}{x^2 - 9}} = 0.$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} \sqrt[4]{\frac{x^2 - 25}{x-2}} = 0.$$

Los límites laterales son iguales, entonces existe $\lim_{x\to -5} f(x)$. Además $\lim_{x\to -5} f(x) = f(5)$.

Entonces, f es continua en $x = 5$ y por ende es continua en el intervalo $\langle 3, +\infty\rangle$.

Se concluye, que f es continua en los siguientes intervalos:

$\langle -\infty, -3\rangle$, $[-3, 0\rangle$, $\langle 0, 3\rangle$ y $\langle 3, +\infty\rangle$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Figueroa, “Análisis matemático 1”, 4th ed., Lima-Perú: Ediciones RFG, 2011, pp. 307-323.

[2] M. Mitacc y L. Toro, “Tópicos de cálculo”, 3rd ed., vol. 1, Lima-Perú: Editorial Thales S.R.L., junio del 2009, pp. 173-196.

[3] E. Espinoza, “Análisis Matemático I”, 2nd ed., Lima-Perú, 1998, pp. 431-441.

[4] J. Stewart, “Cálculo”, 3rd ed., México: Cengage Learning, 2000, pp. 117-127.

[5] J. L. Díaz, “Límites y Continuidad”, versión 1, Universidad de Sonora, División de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas, abril del 2005, pp. 37-50.

EJERCICIOS PROPUESTOS

GRUPO 9

1. Para la función definida por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^4-1}, & 1 < x < 2 \\ x^2+3x-2, & 2 \leq x < 5 \end{cases}$. Analizar la continuidad o discontinuidad en $x = 1$ y $x = 2$.

R. Discontinuidad evitable en $x = 1$ (caso 2), discontinuidad esencial en $x = 2$ (caso 1).

2. Para la función definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2-6x+1, & -1 < x \leq 2 \\ 2x-6, & 2 < x \leq 3 \\ -x^2+4x-3, & 3 < x \leq 5 \end{cases}$. Analizar la continuidad o discontinuidad en $x = 2$ y $x = 3$.

R. Discontinuidad esencial en $x = 2$ (caso 1), continua en $x = 3$.

3. Para la función definida por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3+|x-2|}{|x+1|-3}, & x \neq -4, x \neq 2 \\ -2, & x = -4 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$. Analizar los puntos de continuidad o discontinuidad.

R. Discontinuidad esencial en $x = -4$ y $x = 2$ (caso 2).

4. Para la función definida por: $f(x) = \begin{cases} x+2a, & x < -2 \\ 3ax+b, & -2 \leq x \leq 1 \\ 3x-2b, & x > 1 \end{cases}$. Hallar los valores de a y b de manera que la función sea continua en todo su dominio.

R. $a = \dfrac{1}{3}, b = \dfrac{2}{3}$.

5. Para la función definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|2x^2-3x-9|}{2x^2-3x-9}, & x<-3/2 \lor x>3\\ a, & x=3\\ b, & x=-3/2\end{cases}$. Hallar los valores de a y b de manera que la función sea continua en todo su dominio.

R. $a=1, b=1$.

6. Para la función definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt[3]{3x+3}}{a\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}, & x<8\\ ab, & x=8\\ \dfrac{2}{|2x-7|b}, & x>8\end{cases}$. Hallar los valores de a y b de manera que la función sea continua en todo su dominio.

R. $a=2, b=-\dfrac{1}{3}$.

7. Para la función definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}, & x\neq 1\\ \pi^2/2, & x=1\end{cases}$. Determine los puntos de continuidad o discontinuidad.

R. Continua $\forall x$.

8. Para la función definida por: $f(x)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{8-x}{\sqrt[3]{x}-2}, & x<8\\ 3-2x, & x\geq 8\end{cases}$. Determine los puntos de continuidad o discontinuidad.

R. Discontinua en $x=8$.

9. Para la función definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}, & x\neq 4\\ L, & x=4\end{cases}$. Determine el valor de L, para que la función sea continua en $x=4$.

R. $L=1/4$.

10. Para la función definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}|x|}{x}, & x\in\langle-\pi,0\rangle\\ ax+b, & x\in[0,\pi\rangle\\ \cos x, & x\in[\pi,2\pi\rangle\end{cases}$. Hallar los valores de a y b de manera que la función sea continua en todo su dominio.

R. $a=0, b=-1$.

11. Para la función definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{|x-1|}, & x>-1 \land x\neq 1\\ \operatorname{sgn}(|x^2-1|-1), & x<-1\end{cases}$. Determine los puntos de continuidad o discontinuidad.

R. Es discontinua en $x = -\sqrt{2}$, $x = -1$ y $x = 1$.

12. Para la función definida por: $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & |x-1| \leq 2 \\ 3 - \frac{1}{4}(x-1)^2, & |x-1| > 2 \end{cases}$. Determine los puntos de continuidad o discontinuidad.

R. Es continua en $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

13. Para la función definida por: $f(x) = \begin{cases} -2\operatorname{sen} x, & x < -\pi/2 \\ a \operatorname{sen} x + b, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos x, & x \geq \pi/2 \end{cases}$. Hallar los valores de a y b de manera que la función sea continua en todo su dominio.

R. $a = -1$, $b = 1$.

14. Para la función definida por: $f(x) = \sqrt{\dfrac{25 - x^2}{x^2 - 9}}$. Determinar los intervalos de continuidad.

R. Es continua en los intervalos: $[-5, -3\rangle$ y $\langle 3, 5]$.

15. Para la función definida por: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 16}{x - 6}}$. Determinar los intervalos de continuidad.

R. Es continua en los intervalos: $[-4, 4]$ y $\langle 6, +\infty\rangle$.

16. Para la función definida por: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 6}{2 - x - x^2}}$. Determinar los intervalos de continuidad.

.

R. Es continua en los intervalos: $[-3, -2\rangle$ y $\langle 1, 2]$.

17. Para la función definida por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{[\![1-x]\!] + [\![x-1]\!]}{2 - \sqrt{|x| - [\![x]\!]}}, & 0 \leq x < 2 \\ 2x - 5, & x \geq 2 \end{cases}$. Determine los intervalos de continuidad.

R. Es continua en los intervalos: $\langle 0, 1\rangle$ y $\langle 1, +\infty\rangle$.

18. Para la función definida por: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + [\![x^2]\!]}{x^2 - [\![x]\!]}}$. Analizar la continuidad en $[0, 2]$.

R. No es continua en $[0, 2]$.

19. Para la función definida por: $f(x) = \sqrt{|x| - [\![x]\!]}$. Analizar la continuidad en $[0, 1]$.

R. Si es continua en $[0, 1]$.

20. Sean las funciones: $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ y $g(x) = x - x^3$. Determine los intervalos de continuidad de $f[g(x)]$.

R. Es continua en los intervalos: $\langle -\infty, -1\rangle$, $\langle -1, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$ y $\langle 1, +\infty\rangle$.